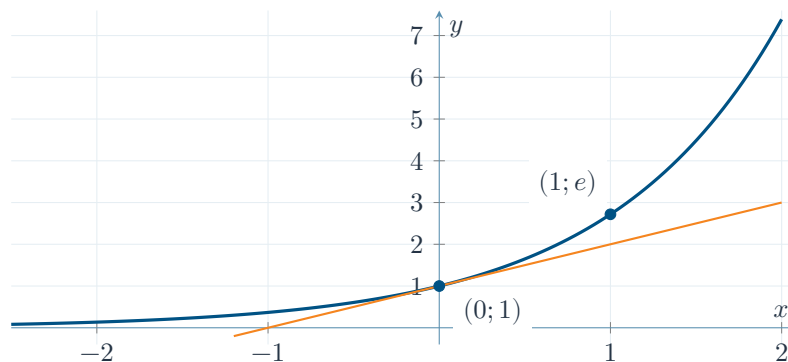




# La fonction exponentielle

Comprendre une croissance. Calculer avec  $e^x$ .

Étudier et modéliser une évolution.



Bleu :  $y = e^x$ . Orange : sa tangente en 0,  $y = 1 + x$ .

- I **Cours et savoir-faire** Les notions, les choix et les étapes.
- II **Exercices** 32 entraînements et 4 problèmes de synthèse.
- III **Corrections détaillées** Les raisons, les calculs et les contrôles.
- IV **Évaluations** Deux sujets chronométrés pour préparer le contrôle.

## MODE D'EMPLOI

# Apprendre, puis s'entraîner

Comprendre une méthode permet de l'adapter à une situation nouvelle.

**Accès directs :** cours p. 3; exercices p. 16; problèmes p. 24; évaluations p. 28; corrections p. 30.

## Comment avancer dans ce chapitre

Lis une notion, puis refais l'exemple sans regarder les lignes suivantes. Les questions « À toi de jouer » servent à vérifier immédiatement une idée. Leurs réponses sont données juste après : masque-les le temps de chercher.

**DÉFINITION** Comprendre les mots

Les définitions nomment les objets et donnent le sens des symboles.

**SAVOIR-FAIRE** Choisir une démarche

Les savoir-faire montrent comment reconnaître la situation, choisir un outil et terminer le calcul.

**POINT DE VIGILANCE** Repérer une confusion

Une erreur expliquée est plus utile qu'une règle mémorisée sans condition.



**Vérifier.** Une valeur cohérente, une unité correcte ou une vérification par substitution aide à détecter une erreur. Ce contrôle complète le raisonnement.

## Les trois temps de l'entraînement

Les exercices 1 à 10 installent les bases; 11 à 24 demandent de choisir et combiner les méthodes; 25 à 32 proposent des problèmes et des lectures critiques; 33 à 36 sont de vrais problèmes de synthèse en plusieurs questions. Termine par les deux évaluations chronométrées.



**Le déclic.** Lorsque tu corriges un exercice, explique à voix haute pourquoi chaque étape est possible. Refaire seulement les nombres ne suffit pas à comprendre la méthode.

## I • PRÉREQUIS

# Préparer le terrain

Une nouvelle fonction, des outils déjà connus.

### Trois réflexes à conserver

Une puissance se traite avant une multiplication :  $3a^2 = 3 \times a^2$ , alors que  $(3a)^2 = 9a^2$ . Les parenthèses changent donc le calcul. Pour  $a \neq 0$ ,  $a^p a^q = a^{p+q}$  et  $a^p / a^q = a^{p-q}$  lorsque  $p, q$  sont entiers. Nous allons retrouver des règles analogues avec un exposant réel. Enfin, le signe de  $f'(x)$  renseigne sur les *variations* de  $f$ , tandis que le signe de  $f(x)$  situe la courbe au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal.



#### SAVOIR-FAIRE Factoriser pour lire un signe

$3(x+1)A - 2A = A[3(x+1) - 2] = A(3x+1)$ . Si  $A > 0$ , cette expression a le signe de  $3x+1$ . Le facteur positif ne disparaît pas de l'expression : il n'influence simplement pas son signe.

### Deux façons de décrire une évolution

Une suite donne des valeurs à des instants séparés : jour 0, jour 1, jour 2... Une fonction peut aussi fournir une valeur entre deux instants. L'exponentielle permettra de relier une évolution continue à une suite géométrique.



#### À TOI DE JOUER Diagnostic rapide

Simplifie  $a^3 a^{-1}$  pour  $a \neq 0$ . Dérive  $(x+2)(x-1)$ . Résous  $-3x+6 > 0$ .

Réponse pour te vérifier :  $a^2$ ; dérivée  $(x-1) + (x+2) = 2x+1$ ;  $x < 2$ , car diviser par  $-3$  inverse le sens de l'inégalité.

I • COMPRENDRE

# Une fonction égale à sa dérivée

La hauteur et la pente portent la même valeur.



## DÉFINITION Fonction exponentielle

Il existe une unique fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée est elle-même et dont l'image de 0 vaut 1. On la note  $\exp$  :

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1.$$

L'existence et l'unicité sont admises. Elles ne se déduisent pas d'un simple dessin.

Au point d'abscisse  $a$ , la courbe a pour hauteur  $\exp(a)$  et sa tangente pour pente  $\exp(a)$ . En particulier, au point  $(0; 1)$ , la pente vaut 1.



## DÉFINITION Le nombre $e$ et la notation $e^x$

On appelle  $e$  le nombre  $\exp(1)$ . Sa valeur approchée est  $e \simeq 2,71828$ . Pour tout réel  $x$ , on écrit  $e^x = \exp(x)$ . Ainsi  $e^0 = 1$  et  $e^1 = e$ .

Dans  $e^x$ ,  $e$  est un nombre fixe et  $x$  est la variable. Dans  $x^e$ , les rôles sont différents : ce n'est pas la même fonction. La notation  $e^x$  est définie aussi pour les réels non entiers.



## SAVOIR-FAIRE Une première tangente

Pour  $f(x) = e^x$ , on connaît  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$ . La tangente en 0 a donc pour équation  $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$ .



## À TOI DE JOUER Lire la définition

Que valent  $f(1)$  et  $f'(1)$ ? La pente en 1 vaut-elle 1?

Réponse pour te vérifier :  $f(1) = e$  et  $f'(1) = e$ . La pente vaut environ 2,718, pas 1.

## I • COMPRENDRE

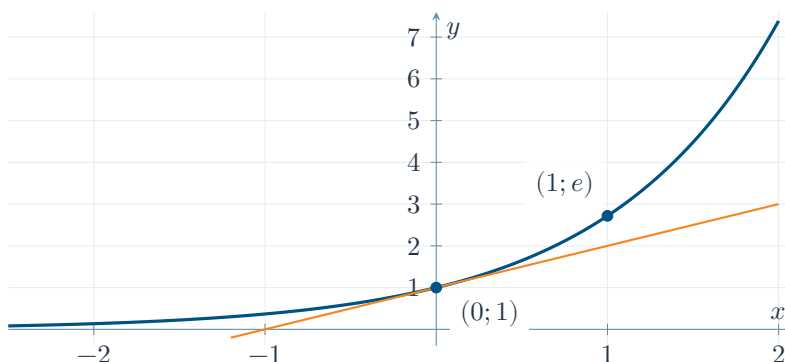
# Positivité, croissance et lecture

Un exposant négatif ne donne pas une valeur négative.



### PROPRIÉTÉ Les deux propriétés essentielles

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ . Comme la dérivée de  $e^x$  vaut  $e^x$ , elle est strictement positive : la fonction exponentielle est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .



**Lire le dessin.** La courbe bleue passe par  $(0; 1)$ . Pour  $x < 0$ , elle reste au-dessus de l'axe horizontal et en dessous de la hauteur 1. Pour  $x > 0$ , elle est au-dessus de 1. La droite orange est une tangente ; ses valeurs ne sont pas celles de l'exponentielle sauf au point de contact.



### POINT DE VIGILANCE Deux signes différents

$e^{-2} > 0$ , alors que  $-e^2 < 0$ . Le signe « moins » est dans l'exposant dans le premier cas ; il est devant l'exponentielle dans le second.



### À TOI DE JOUER Comparer sans calculatrice

Classe  $e^{-3}$ ,  $1$ ,  $e^{0,5}$  et  $e^2$ .

Réponse pour te vérifier :  $0 < e^{-3} < 1 < e^{0,5} < e^2$ , car les exposants sont dans le même ordre.

I • SAVOIR-FAIRE 1

# Transformer une expression

Regarder l'opération avant de choisir une règle.



## PROPRIÉTÉ Règles algébriques

Pour tous réels  $a, b$  et tout entier  $n$  :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad (e^a)^n = e^{na}.$$

La relation de produit est admise. L'inverse en découle :  $e^a e^{-a} = e^0 = 1$ . Les divisions sont possibles car l'exponentielle ne s'annule pas.



## SAVOIR-FAIRE Écrire une seule exponentielle

Pour  $A = \frac{e^{2x+1}e^{x-4}}{e^{x+2}}$ , on additionne les exposants du numérateur puis on retranche *tout* celui du dénominateur :

$$A = e^{(2x+1)+(x-4)-(x+2)} = e^{2x-5}.$$

Pour  $B = (e^{-2x})^3 / e^x$ , on obtient  $B = e^{-6x-x} = e^{-7x}$ .

## Une somme ne se regroupe pas de cette façon

$e^a + e^b$  ne vaut pas  $e^{a+b}$ . Pour  $a = b = 0$ , le membre de gauche vaut 2 et celui de droite 1. En revanche, on peut factoriser :  $e^{x+2} + 3e^x = e^x(e^2 + 3)$ . C'est la distributivité ordinaire.



## À TOI DE JOUER Choisir la bonne règle

Simplifie  $e^{3x} / e^{x-1}$ , puis factorise  $e^{2x} - e^x$ .

Réponse pour te vérifier :  $e^{2x+1}$  ; puis  $e^x(e^x - 1)$ . Le deuxième calcul concerne une différence, pas un quotient.

## I • SAVOIR-FAIRE 2

# Résoudre une équation

L'exponentielle conserve l'information sur son exposant.



### PROPRIÉTÉ Injectivité

La stricte croissance donne, pour tous réels  $u, v$  :  $e^u = e^v \iff u = v$ . En particulier,  $e^u = 1 \iff u = 0$ .



### SAVOIR-FAIRE Mettre les deux membres sous la même forme

$e^{3x-2} = e^{x+4} \iff 3x-2 = x+4 \iff x = 3$ . Pour  $e^{x^2-2x} = 1$ , on écrit  $1 = e^0 : x^2 - 2x = 0$ , donc  $x(x-2) = 0$ . Les solutions sont 0 et 2.

## Si l'équation est un produit nul

$(x+3)e^{2x} = 0$  : le facteur exponentiel est toujours strictement positif. Seul  $x+3$  peut être nul ; la solution est  $-3$ .



### POINT DE VIGILANCE Ce que l'on ne peut pas supprimer

$e^x + e^2 = e^3$  ne donne pas  $x+2=3$ . On ne retire pas « les  $e$  » à travers une somme. De même,  $e^x = 2$  ne donne pas  $x = 2$ . Une approximation numérique peut être cherchée ; les logarithmes ne sont pas nécessaires dans ce chapitre.



### À TOI DE JOUER Existence avant calcul

Résous  $4e^{x-1} = 0$  et  $e^{2x+1} = e^{-x}$ .

Réponse pour te vérifier : La première n'a aucune solution, par positivité. La seconde donne  $2x+1 = -x$ , donc  $x = -1/3$ .

I • SAVOIR-FAIRE 3

# Résoudre une inéquation

Comparer les exposants, puis résoudre sans perdre le sens.



## PROPRIÉTÉ Ordre conservé

$e^u < e^v \iff u < v$ , et de même pour  $\leq$ ,  $>$  ou  $\geq$ . Cette règle vient de la stricte croissance de l'exponentielle.



## SAVOIR-FAIRE Un exposant affine

$e^{1-2x} \geq e^{x+4} \iff 1-2x \geq x+4 \iff -3x \geq 3 \iff x \leq -1$ . Le sens change à la dernière étape parce que l'on divise par un nombre négatif, pas parce que l'on utilise l'exponentielle.

## Un exposant du second degré

$e^{x^2} \leq e^4 \iff x^2 \leq 4$ . On obtient  $-2 \leq x \leq 2$ , soit  $[-2; 2]$ . Les deux contraintes doivent être satisfaites ensemble.

## Un produit avec une exponentielle

Le signe de  $(x-2)e^{-x}$  est celui de  $x-2$ . Ainsi  $(x-2)e^{-x} < 0 \iff x < 2$ . Il est inutile de chercher un zéro à  $e^{-x}$ .



## À TOI DE JOUER Deux situations différentes

Résous  $e^{x^2} > e^9$ , puis  $-2e^x \leq -2e$ .

Réponse pour te vérifier :  $x < -3$  ou  $x > 3$ ; pour la seconde, diviser par  $-2$  donne  $e^x \geq e$ , donc  $x \geq 1$ .

I • SAVOIR-FAIRE 4

# Dériver une exponentielle affine

Le coefficient de  $x$  reste dans la dérivée.



## PROPRIÉTÉ Formule utile

Pour  $a, b$  réels, la fonction  $f(x) = e^{ax+b}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = ae^{ax+b}$ .

**Justification.** Pour  $a \neq 0$ , la relation algébrique permet d'écrire le taux :

$$\frac{e^{a(x+h)+b} - e^{ax+b}}{h} = e^{ax+b} \frac{e^{ah} - 1}{h} = ae^{ax+b} \frac{e^{ah} - 1}{ah}.$$

Quand  $h \rightarrow 0$ ,  $ah \rightarrow 0$  et le dernier quotient tend vers  $\exp'(0) = 1$ . Si  $a = 0$ , la fonction est constante et sa dérivée vaut 0, ce qui convient aussi.



## SAVOIR-FAIRE Repérer le coefficient avant de dériver

Pour  $f(x) = 7e^{-3x+2}$ , le facteur 7 reste et l'exposant fournit  $-3$  :  $f'(x) = -21e^{-3x+2}$ . La dérivée est négative, donc  $f$  décroît. Pour  $g(x) = 5 - 2e^{-x}$  :  $g'(x) = -2(-e^{-x}) = 2e^{-x} > 0$  ;  $g$  croît.



## POINT DE VIGILANCE Positivité n'est pas croissance de toute expression

$e^{-x}$  est positive, mais sa dérivée est  $-e^{-x} < 0$  : elle décroît. C'est le signe de la dérivée complète qu'il faut examiner.



## À TOI DE JOUER Trois dérivées

Dérive  $e^{4x}$ ,  $3e^{2-x}$  et  $e^2$ .

Réponse pour te vérifier :  $4e^{4x}$  ;  $-3e^{2-x}$  ; 0, car  $e^2$  est une constante.

I • SAVOIR-FAIRE 5

# Dériver un produit ou un quotient

Les règles de dérivation continuent de s'appliquer.

## Produit : deux contributions

Soit  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ . Avec  $u = x + 2$ ,  $u' = 1$ ,  $v = e^{-x}$  et  $v' = -e^{-x}$  :

$$f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = e^{-x}[1 - (x + 2)] = (-x - 1)e^{-x}.$$

Les parenthèses après le signe moins évitent de transformer  $-x - 2$  en  $-x + 2$ .

## Quotient : annoncer le domaine

Soit  $g(x) = \frac{e^x}{x + 2}$ , définie pour  $x \neq -2$ . Sur chacun des deux intervalles du domaine :

$$g'(x) = \frac{e^x(x + 2) - e^x}{(x + 2)^2} = \frac{e^x(x + 1)}{(x + 2)^2}.$$

L'exponentielle et le carré du dénominateur sont strictement positifs. Le signe dépend donc de  $x + 1$ , mais la coupure en  $-2$  reste indispensable.



### SAVOIR-FAIRE Une autre écriture peut simplifier

$h(x) = \frac{x^2}{e^x} = x^2 e^{-x}$ . La dérivation du produit donne  $h'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$ , sans calcul de quotient.



### À TOI DE JOUER Ne pas oublier un terme

Dérive  $(2x - 1)e^x$ .

Réponse pour te vérifier :  $2e^x + (2x - 1)e^x = (2x + 1)e^x$ . La dérivée du produit n'est pas  $2e^x$  seule.

I • SAVOIR-FAIRE 6

# Des variations à une borne

Terminer l'étude par une information utilisable.

Considérons  $f(x) = e^x - x$  sur  $[-2; 2]$ . La fonction est dérivable et  $f'(x) = e^x - 1$ . Comme  $1 = e^0$ , la stricte croissance donne  $f'(x) < 0$  si  $x < 0$ ,  $f'(0) = 0$  et  $f'(x) > 0$  si  $x > 0$ .

|         |              |   |           |
|---------|--------------|---|-----------|
| $x$     | -2           | 0 | 2         |
| $f'(x)$ | -            | 0 | +         |
| $f(x)$  | $e^{-2} + 2$ | 1 | $e^2 - 2$ |

Le minimum vaut  $f(0) = 1$ . Ainsi, sur cet intervalle,  $f(x) \geq 1$  : c'est plus précis que dire seulement  $f(x) > 0$ . Le raisonnement sur le signe de la dérivée reste valable sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit pour tout réel  $x$  :

$$e^x \geq 1 + x, \quad \text{avec égalité seulement si } x = 0.$$

## Interprétation graphique

La courbe de l'exponentielle se situe au-dessus de sa tangente en 0. Le dessin suggère cette propriété; l'étude de  $e^x - x$  la démontre.



### À TOI DE JOUER Réutiliser la borne

Que peux-tu affirmer de  $e^x - x + 4$ ? Peut-elle être nulle?

Réponse pour te vérifier : Elle est au moins égale à 5 pour tout réel  $x$ . Elle ne peut donc jamais être nulle.

I • SAVOIR-FAIRE 7

# Choisir un optimum

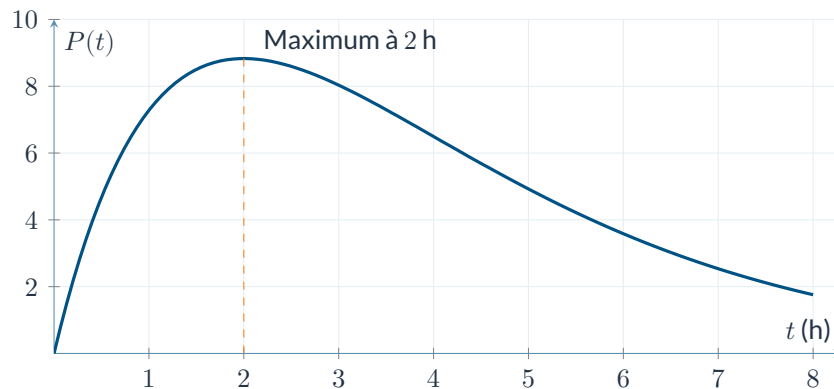
La quantité étudiée peut monter puis descendre.

Un modèle donne  $P(t) = 12te^{-0,5t}$  pour  $t \in [0; 8]$ , où  $t$  est le temps en heures et  $P(t)$  une production horaire en unités par heure. Ici, la formule porte sur les valeurs numériques dans ces unités.



## SAVOIR-FAIRE Étudier le produit entier

$P'(t) = 12e^{-0,5t} - 6te^{-0,5t} = 6(2 - t)e^{-0,5t}$ . L'exponentielle est strictement positive; le signe est celui de  $2 - t$ . La fonction croît jusqu'à  $t = 2$ , puis décroît. Le maximum vaut  $P(2) = 24e^{-1} \simeq 8,83$  unités par heure.



**Vérifier.** Les deux facteurs de  $P$  varient en sens opposés. Leurs variations prises séparément ne suffisent pas pour conclure sur leur produit.



## À TOI DE JOUER Une contrainte supplémentaire

Si le fonctionnement s'arrête à 1 h, quand le maximum sur  $[0; 1]$  est-il atteint?

Réponse pour te vérifier : À 1 h, car la fonction est encore croissante sur tout l'intervalle autorisé.

## I • MODÉLISER

# Croissance et décroissance

À durées égales, le même facteur multiplicatif.

Un modèle exponentiel s'écrit  $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ . Le temps  $t$  et le coefficient  $k$  doivent être choisis de façon que  $kt$  soit sans dimension. Par exemple, si  $t$  est en h,  $k$  est en  $h^{-1}$ . Pour une même durée  $h$  :

$$\frac{Q(t+h)}{Q(t)} = \frac{Q_0 e^{k(t+h)}}{Q_0 e^{kt}} = e^{kh} \quad (Q_0 \neq 0).$$

Ce rapport ne dépend pas du moment de départ. Les *différences* ne sont en général pas constantes.

Pour  $Q_0 > 0$ , la dérivée vérifie  $Q'(t) = kQ(t)$  : le modèle croît si  $k > 0$ , décroît si  $k < 0$  et reste constant si  $k = 0$ .



### SAVOIR-FAIRE Un taux continu n'est pas un pourcentage par période

Si  $Q(t) = 80e^{0,12t}$  avec  $t$  en jours, le facteur en un jour est  $e^{0,12} \simeq 1,1275$ . L'augmentation est d'environ 12,75 %, pas exactement 12 %. La valeur 0,12 exprime le taux instantané relatif du modèle :  $Q'(t) = 0,12Q(t)$ , avec les unités adaptées.

## Retrouver une suite géométrique

Aux instants entiers,  $u_n = Q(n) = Q_0(e^k)^n$ . C'est une suite géométrique de premier terme  $Q_0$  et de raison  $e^k$ .



### POINT DE VIGILANCE Domaine et limites du modèle

Une formule ajustée sur une période ne garantit pas une évolution identique indéfiniment. On précise l'intervalle de temps sur lequel on l'utilise.



### À TOI DE JOUER Une décroissance

Pour  $Q(t) = 50e^{-0,2t}$ , calcule  $Q(0)$  et le facteur multiplicatif en cinq unités de temps.

Réponse pour te vérifier :  $Q(0) = 50$  ; le facteur est  $e^{-1} \simeq 0,368$ . La diminution est d'environ 63,2 %.

## I • NUMÉRIQUE

# Trouver un seuil sans logarithme

Encadrer la réponse puis annoncer la précision.

On cherche quand  $C(t) = 60e^{-0,3t}$  devient inférieure à 20, avec  $t \in [0; 10]$  en minutes. La fonction est strictement décroissante, car  $C'(t) = -18e^{-0,3t} < 0$ . On trouve  $C(3) \simeq 24,39$  et  $C(4) \simeq 18,07$ . Le seuil est entre 3 et 4 minutes. Pour préciser :  $C(3,66) \simeq 20,012$  et  $C(3,67) \simeq 19,952$ . Il est entre 3,66 et 3,67 minutes.



### SAVOIR-FAIRE Une dichotomie

```
from math import exp

def concentration(t):
    return 60 * exp(-0.3*t)

a, b = 3.0, 4.0
while b - a > 0.01:
    m = (a + b) / 2
    if concentration(m) > 20:
        a = m
    else:
        b = m
print(a, b)
```

On conserve un intervalle où la valeur 20 est franchie. Le test doit tenir compte de la décroissance : une concentration encore trop grande signifie que le temps est trop petit.



**Vérifier.** Le résultat est un encadrement, pas une valeur exacte. Si l'on demande la première minute entière pour laquelle  $C(t) < 20$ , la réponse est 4.



### À TOI DE JOUER Un piège d'arrondi

Pourquoi annoncer seulement « 3,66 min » ne garantit-il pas que  $C(t) < 20$ ?

**Réponse pour te vérifier :** À 3,66 min, la concentration est encore légèrement supérieure à 20. Il faut distinguer arrondi du seuil et temps garantissant la condition.

## I • NUMÉRIQUE

# Construire une approximation

La méthode d'Euler relie pente et pas.

Pour  $y = e^x$ , on sait  $y' = y$  et  $y(0) = 1$ . Sur un petit pas  $h$ , la tangente suggère  $y(x + h) \simeq y(x) + hy(x)$ . On construit donc les valeurs approchées

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = (1 + h)y_n, \quad x_0 = 0, y_0 = 1.$$

Les  $y_n$  forment une suite géométrique. Pour arriver en  $x = 1$  en  $N$  pas, on choisit  $h = 1/N$ ; alors  $y_N = (1 + 1/N)^N$ .

| $N$  | $h$   | $y_N$ approché | $e - y_N$ approché |
|------|-------|----------------|--------------------|
| 10   | 0,1   | 2,59374        | 0,12454            |
| 100  | 0,01  | 2,70481        | 0,01347            |
| 1000 | 0,001 | 2,71692        | 0,00136            |

```
def euler(N):
    h = 1 / N
    y = 1.0
    for _ in range(N):
        y = y + h*y
    return y
```

Ici  $N$  doit être un entier strictement positif. Les résultats illustrent l'amélioration numérique quand le pas diminue; ce tableau seul n'est pas une démonstration de convergence.



### À TOI DE JOUER Calculer à la main

Avec  $h = 0,5$ , donne les deux premières valeurs après  $y_0 = 1$ .

Réponse pour te vérifier :  $y_1 = 1,5$  et  $y_2 = 2,25$ . C'est une approximation de  $e$ , pas sa valeur exacte.

## II • EXERCICES

# S'entraîner avec méthode

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

**1 Reconnaître ce que l'on calcule**

Bases

Pour  $f(x) = e^x$ , donne les valeurs exactes de  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $f'(0)$ . Compare ensuite  $e^{-2}$  et  $-e^2$ . Explique le rôle du signe moins.

[Correction 1](#)**2 Réduire une écriture**

Bases

Écris sous la forme d'une seule exponentielle :  $A = e^{3x-1}e^{2-x}$ ;  $B = e^{4x}/e^{x+3}$ ;  $C = (e^{-x+2})^3e^{2x}$ .

[Correction 2](#)**3 Factoriser une somme**

Bases

Factorise  $e^{x+1} + 2e^x$ , puis  $e^{2x} - 3e^x$ . Un élève écrit  $e^x + e^x = e^{2x}$ . Donne un contre-exemple.

[Correction 3](#)**4 Comparer exactement**

Bases

Range dans l'ordre croissant  $e^{-1}$ ,  $e^{1/2}$ ,  $1$ ,  $e^2$  et  $e^{-3}$ . Justifie sans valeurs approchées. Encadre  $e^{0,7}$  entre deux de ces nombres.

[Correction 4](#)

## II • EXERCICES

# Entraînement · 5 à 8

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

**5 Étudier un signe**

Bases

Détermine le signe de  $A(x) = (2x - 6)e^{-x}$ , puis de  $B(x) = -4e^{2x+1}$ . Où ces expressions s'annulent-elles?

[Correction 5](#)**6 Revenir aux exposants**

Bases

Résous dans  $\mathbb{R}$  :  $e^{5x-1} = e^{2x+8}$  ;  $e^{3-2x} = 1$  ;  $e^{x+2}e^{x-1} = e^7$ .

[Correction 6](#)**7 Réinvestir le second degré**

Bases

Résous  $e^{x^2-3x} = e^4$ , puis  $e^{x^2} = e^{2x}$ . Donne les ensembles de solutions.

[Correction 7](#)**8 Repérer une impossibilité**

Bases

Résous  $e^{2x} = -1$ ,  $e^{x-4} = 0$  et  $(x^2 + 1)e^x = 0$ . Explique le point commun des trois raisonnements.

[Correction 8](#)

## II • EXERCICES

# Entraînement · 9 à 12

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

**9 Comparer puis isoler**

Bases

Résous  $e^{2-3x} \leq e^{x+6}$ , puis  $-3e^x > -3e^2$ . Écris les intervalles obtenus.

[Correction 9](#)**10 Un intervalle ou deux morceaux?**

Bases

Résous  $e^{x^2} \leq e^9$ , puis  $(x-1)(x+2)e^x > 0$ . Dans chaque cas, précise si les contraintes se combinent avec «et» ou avec «ou».

[Correction 10](#)**11 Une somme de fonctions**

Bases

Dérive  $f(x) = 3e^x - 2x^2 + 7$ ,  $g(x) = e^x + e^{-x}$  et  $h(x) = e^3x$ . Pour  $h$ , précise ce qui est constant.

[Correction 11](#)**12 Garder le coefficient intérieur**

Bases

Dérive  $u(x) = 4e^{3x-2}$ ,  $v(x) = 6 - 5e^{-2x}$  et  $w(x) = e^{1-x}/3$ . Détermine le sens de variation de chacune.

[Correction 12](#)

## II • EXERCICES

# Entraînement · 13 à 16

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

**13 Réparer deux dérivées**

Application

Un élève écrit  $(e^{-4x})' = e^{-4x}$  et  $((x+3)e^x)' = e^x$ . Corrige chaque résultat en expliquant l'oubli.

Correction 13

**14 Un produit et son minimum**

Application

On considère  $f(x) = (x-2)e^x$  sur  $[-2; 3]$ .

1. Calcule et factorise  $f'(x)$ .
2. Étudie le signe de  $f'$  puis les variations de  $f$ .
3. Donne la valeur exacte du minimum et les valeurs aux extrémités.
4. Explique pourquoi le zéro de  $f$  et l'abscisse du minimum sont différents.

Correction 14

**15 Un quotient, un domaine**

Application

Soit  $f(x) = e^x / (x+1)$ .

1. Détermine son domaine de définition.
2. Calcule et simplifie  $f'(x)$  sur ce domaine.
3. Étudie les variations sur chacun des intervalles du domaine. Aucune limite n'est demandée.
4. Détermine le minimum de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$  et explique pourquoi aucune flèche ne doit traverser  $-1$ .

Correction 15

**16 Deux exponentielles, une borne**

Application

Pour  $f(x) = e^x + e^{-x}$  :

1. Calcule  $f'$  et montre qu'elle a le signe de  $x$ .
2. Dresse le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Dédus une borne exacte valable sur  $\mathbb{R}$ .
4. Résous  $f(x) = 2$  et justifie l'unicité de la solution.

Correction 16

## II • EXERCICES

# Entraînement • 17 à 20

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

### 17 Une tangente à construire

Application

Pour  $f(x) = e^{2x}$  :

1. Calcule  $f(0)$  et  $f'(0)$ .
2. Détermine l'équation de la tangente en 0.
3. Choisis l'abscisse à utiliser pour approcher  $e^{0,04}$ , puis donne cette approximation.
4. Compare avec  $e^{0,04} \simeq 1,04081$  et commente l'écart.

Correction 17

### 18 Une comparaison de courbes

Application

À l'aide de  $e^u \geq 1 + u$  pour tout réel  $u$ , compare  $e^{2x}$  et  $1 + 2x$ . Déduis le signe de  $H(x) = e^{2x} - 2x + 3$ . Peut-on avoir  $H(x) = 0$ ?

Correction 18

### 19 Une dérivée nulle en un point

Application

Soit  $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ . Calcule  $f'$  et explique pourquoi une tangente horizontale en 0 ne donne pas ici un extremum.

Correction 19

### 20 Conclure à une borne précise

Application

On considère  $f(x) = (x^2 + 4x + 6)e^{-x}$  sur  $[0; 3]$ .

1. Calcule  $f'(x)$  et factorise-la par  $e^{-x}$ .
2. Montre que  $f'(x) < 0$  sur l'intervalle.
3. Dresse le tableau de variations en calculant les valeurs aux bornes.
4. Encadre  $f(x)$  par deux nombres exacts pour tout  $x \in [0; 3]$ .

Correction 20

## II • EXERCICES

# Entraînement · 21 à 24

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

### 21 Un quotient toujours défini

Application

Pour  $f(x) = e^x / (e^x + 2)$  :

1. Justifie que le domaine est  $\mathbb{R}$ .
2. Calcule  $f'$  puis détermine son signe.
3. Donne le sens de variation de  $f$ .
4. Montre directement que  $0 < f(x) < 1$  pour tout réel  $x$ .

[Correction 21](#)

### 22 Retrouver deux paramètres

Application

On cherche  $f(x) = ae^x + b$ , où  $a, b$  sont réels. Sa courbe passe par  $(0; 5)$  et sa tangente en 0 a pour pente 2. Détermine  $a, b$  et l'équation de cette tangente.

[Correction 22](#)

### 23 Identifier un modèle

Application

Une quantité est modélisée par  $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ , avec  $t$  en heures. On connaît  $Q(0) = 40$  unités et  $Q(2) = 40e^{-0,6}$  unités.

1. Détermine  $Q_0$ .
2. Utilise la seconde donnée pour déterminer  $k$  avec son unité.
3. Calcule le facteur d'évolution en trois heures et le pourcentage d'évolution correspondant.
4. Contrôle la cohérence du signe de  $k$  avec l'évolution obtenue.

[Correction 23](#)

### 24 Comparer deux évolutions

Application

Sur  $[0; 10]$ , deux modèles donnent  $A(t) = 30e^{0,2t}$  et  $B(t) = 30e^{0,05t+1}$ .

1. Compare  $A(0)$  et  $B(0)$ .
2. Résous exactement  $A(t) = B(t)$ .
3. Détermine lequel des deux modèles est le plus grand avant puis après cet instant.
4. Vérifie le classement initial avec les valeurs de la première question.

[Correction 24](#)

## II • EXERCICES

## Entraînement · 25 à 28

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

**25** Un pourcentage par jour[Approfondir](#)

Un modèle donne  $N(t) = 300e^{0,08t}$ , avec  $t$  en jours. Calcule le facteur d'évolution quotidien et le pourcentage correspondant. Justifie pourquoi  $N(t+1) - N(t)$  n'est pas constant.

[Correction 25](#)**26** La moitié, à quel moment?[Approfondir](#)

Pour  $Q(t) = 90e^{-0,4t}$ ,  $t \geq 0$  en heures, on donne  $Q(1,73) \simeq 45,052$  et  $Q(1,74) \simeq 44,872$ . Encadre le temps de demi-diminution et donne la première heure entière où  $Q < 45$ .

[Correction 26](#)**27** Retrouver la suite[Approfondir](#)

Pour  $u_n = 12e^{-0,25n}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , montre que la suite est géométrique. Donne son premier terme, sa raison et son sens de variation. Peut-elle atteindre exactement zéro?

[Correction 27](#)**28** Quatre pas d'Euler[Approfondir](#)

On approche  $e^x$  entre 0 et 1 avec quatre pas de taille  $h = 1/4$ . Calcule  $y_0$  à  $y_4$  avec  $y_{n+1} = y_n + hy_n$ . Compare  $y_4$  à  $e \simeq 2,71828$ .

[Correction 28](#)

## II • EXERCICES

# Entraînement · 29 à 32

Justifie les propriétés utilisées avant de calculer.

### 29 Une boucle de seuil

[Approfondir](#)

Écris un programme qui donne le premier entier  $n \geq 0$  tel que  $20e^{0,3n} \geq 100$ . Donne sa réponse et vérifie les deux entiers autour du seuil.

[Correction 29](#)

### 30 Conserver un encadrement

[Approfondir](#)

Pour résoudre numériquement  $e^x = 3$ , on part de  $a = 1, b = 2$  et  $m = (a + b)/2$ . Si  $e^m < 3$ , faut-il remplacer  $a$  ou  $b$  par  $m$ ? Fais deux étapes; on donne  $e^{1,5} \simeq 4,482$  et  $e^{1,25} \simeq 3,490$ .

[Correction 30](#)

### 31 Une réponse maximale

[Approfondir](#)

Un indicateur est modélisé par  $R(t) = (t + 1)e^{-t/2}$  sur  $[0; 6]$ .

1. Calcule et factorise  $R'(t)$ .
2. Étudie son signe puis les variations de  $R$ .
3. Détermine la valeur exacte du maximum et une valeur approchée.
4. Détermine la tangente en 0.
5. Explique pourquoi la décroissance de  $e^{-t/2}$  ne suffisait pas à conclure sur  $R$ .

[Correction 31](#)

### 32 Bilan : dérivée, borne et tangente

[Approfondir](#)

Soit  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$  sur  $[0; 3]$ .

1. Calcule  $f'$  en détaillant la factorisation.
2. Étudie les variations et donne les valeurs extrêmes.
3. Donne la tangente en 0 puis situe la courbe par rapport à elle sur l'intervalle.
4. Un élève conclut : «  $f'(0) = 0$ , donc  $f$  est constante ». Réponds-lui précisément.

[Correction 32](#)

## II • PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

# Quatre parcours de contrôle

Modéliser, choisir les outils, calculer puis interpréter.

### 33 Suivre l'élimination d'une substance

Synthèse • 9 questions

Dans une expérience, la masse d'une substance présente dans un échantillon est modélisée par

$$C(t) = 120e^{-0,18t}, \quad 0 \leq t \leq 12,$$

où  $t$  est exprimé en heures et  $C(t)$  en milligrammes.

1. Calcule  $C(0)$  et interprète cette valeur avec son unité.
2. Calcule  $C'(t)$ , étudie son signe puis donne le sens de variation de  $C$ .
3. Montre que, d'une heure à la suivante, la masse est multipliée par  $e^{-0,18}$ . À l'aide de  $e^{-0,18} \simeq 0,8353$ , donne le pourcentage de diminution horaire.
4. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq n \leq 12$ , on pose  $u_n = C(n)$ . Justifie que  $(u_n)$  est géométrique et précise son premier terme et sa raison.
5. Calcule  $C(4)$  et  $C(8)$  au dixième de milligramme.
6. On donne  $C(7,70) \simeq 30,009$  et  $C(7,71) \simeq 29,955$ . Encadre au centième d'heure l'instant où la masse passe sous 30 mg.
7. Détermine la première heure entière à laquelle la masse est strictement inférieure à 30 mg. Justifie avec deux valeurs consécutives.
8. Détermine la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, puis utilise-la pour approcher  $C(0,1)$ .
9. La tangente obtenue devient négative pour des temps assez grands. Explique pourquoi cela ne contredit ni le modèle ni son utilité locale.

Correction 33

### 34 Comparer deux populations

Synthèse • 9 questions

Deux populations sont modélisées pendant quinze années par

$$A(t) = 80e^{0,12t} \quad \text{et} \quad B(t) = 80e^{0,04t+0,8},$$

où  $t \in [0; 15]$  et les effectifs sont exprimés en milliers.

1. Calcule  $A(0)$  et  $B(0)$ , puis indique la population initialement la plus grande.
2. Détermine le facteur d'évolution annuel de chaque modèle. Lequel possède le plus fort taux de croissance relatif?
3. Calcule  $A'(t)$  et  $B'(t)$ , puis justifie que les deux fonctions sont croissantes.
4. Résous exactement  $A(t) = B(t)$  sans utiliser de logarithme.
5. Compare  $A(t)$  et  $B(t)$  avant puis après l'instant trouvé.
6. Montre que  $\frac{A(t)}{B(t)} = e^{0,08t-0,8}$ . Comment ce quotient confirme-t-il le résultat précédent?
7. Calcule les deux effectifs au bout de quinze ans, au millier près, et interprète l'écart.
8. Pour les instants entiers, montre que les suites  $a_n = A(n)$  et  $b_n = B(n)$  sont géométriques. Donne leurs raisons.
9. Un élève affirme : « puisque les deux populations augmentent, elles ne peuvent pas se croiser ». Identifie son erreur et rédige une réponse mathématique.

Correction 34

**35 Régler la réponse d'un capteur**

Synthèse • 9 questions

Après une impulsion, le signal d'un capteur est modélisé sur  $[0; 12]$  par

$$R(t) = te^{-t/3},$$

où  $t$  est exprimé en secondes.

1. Calcule  $R(0)$  et  $R(12)$ , puis décris ce que ces valeurs suggèrent.
2. Calcule  $R'(t)$  et factorise l'expression obtenue.
3. Étudie le signe de  $R'$  et dresse le tableau de variations complet de  $R$ .
4. Détermine l'instant du maximum et sa valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.
5. Détermine l'équation de la tangente en 0 et utilise-la pour approcher  $R(0,12)$ .
6. Calcule la valeur réelle de  $R(0,12)$  au millième et mesure l'écart avec l'approximation précédente.
7. Le dispositif ne peut enregistrer qu'aux instants pairs. À l'aide de  $e^{-2/3} \simeq 0,5134$ , compare  $R(2)$  et  $R(4)$ , puis choisis le meilleur instant disponible.
8. Un technicien observe seulement que  $e^{-t/3}$  décroît et conclut que  $R$  décroît. Explique précisément l'erreur.
9. Rédige une conclusion en distinguant optimum continu et choix discret.

Correction 35

**36 Étudier un modèle de saturation**

Bilan · 10 questions

Le pourcentage de réalisation d'un processus est modélisé sur  $[0; 6]$  par

$$P(t) = \frac{100}{1 + e^{2-t}}.$$

1. Justifie que  $P$  est définie sur  $[0; 6]$  et que  $0 < P(t) < 100$ .
2. Calcule exactement  $P(2)$  et interprète cette valeur.
3. Calcule  $P'(t)$  avec la règle du quotient, puis simplifie le numérateur.
4. Étudie le signe de  $P'$  et les variations de  $P$  sur  $[0; 6]$ .
5. Calcule  $P(0)$  et  $P(6)$  au dixième, puis rédige le bilan d'évolution.
6. Détermine l'équation de la tangente en  $t = 2$  et utilise-la pour approcher  $P(2,04)$ .
7. Vérifie que  $P(2+h) + P(2-h) = 100$  pour tout réel  $h$  tel que les deux temps appartiennent à l'intervalle.
8. Résous exactement  $P(t) \geq 50$  sur  $[0; 6]$ .
9. On donne  $P(4,19) \simeq 89,935$  et  $P(4,20) \simeq 90,025$ . Encadre au centième l'instant de franchissement de 90 %.
10. Une hausse de 25 points par unité de temps est annoncée pour toute la durée. Explique l'origine possible de ce nombre et corrige l'affirmation.

Correction 36

## IV • ÉVALUATIONS

# Se préparer au contrôle

Cherche sans la correction, puis analyse précisément les points perdus.

**E1** Contrôle ciblé — produit et extremum

25 min • 10 points

On considère  $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$  sur  $[0; 4]$ .

1. Calcule  $f(0)$  et  $f(4)$ . 1 pt
2. Montre que  $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ . 2 pts
3. Étudie le signe de  $f'$  puis dresse le tableau de variations de  $f$ . 3 pts
4. Détermine le maximum exact de  $f$  et une valeur approchée au millième. 1,5 pt
5. Détermine la tangente en 0 et utilise-la pour approcher  $f(0,02)$ . 1,5 pt
6. La valeur calculée est  $f(0,02) \simeq 1,019407$ . Commente la précision et rappelle pourquoi la tangente ne donne qu'une approximation locale. 1 pt

[Correction E1](#)

**E2** Contrôle de synthèse — refroidissement

50 min · 20 points

La température d'un objet placé dans une pièce à  $20^\circ\text{C}$  est modélisée par

$$T(t) = 20 + 60e^{-0,3t}, \quad 0 \leq t \leq 6,$$

où  $t$  est exprimé en heures.

1. Calcule  $T(0)$  et interprète les deux constantes 20 et 60 du modèle. 2 pts
2. Calcule  $T'(t)$  et démontre que la température diminue pendant les six heures. 3 pts
3. On pose  $u_n = T(n) - 20$ . Montre que  $(u_n)$  est géométrique et donne sa raison. 3 pts
4. À l'aide de  $e^{-0,3} \simeq 0,7408$ , donne le pourcentage de diminution horaire de l'écart à la température de la pièce. 2 pts
5. On donne  $T(2,31) \simeq 50,004$  et  $T(2,32) \simeq 49,915$ . Encadre au centième d'heure l'instant où la température passe sous  $50^\circ\text{C}$ . 3 pts
6. Détermine la première heure entière pour laquelle  $T(t) < 50^\circ\text{C}$  et vérifie les deux entiers utiles. 2 pts
7. Détermine la tangente à la courbe en 0 et utilise-la pour approcher  $T(0,1)$ . 3 pts
8. Un élève affirme : « l'objet perd  $18^\circ\text{C}$  chaque heure ». Explique d'où vient 18, puis corrige cette interprétation. 2 pts

Correction E2

### III • CORRECTIONS

## Des calculs expliqués

Repère la règle, le calcul et le contrôle.



#### SAVOIR-FAIRE Ce qu'une copie complète doit laisser voir

Pour chaque question, identifie d'abord la propriété utilisée : positivité, croissance, règle de dérivation ou modèle exponentiel. Écris ensuite une transformation exacte, puis seulement l'application numérique. Termine par la réponse demandée — ensemble de solutions, sens de variation, valeur extrême ou interprétation — et par un contrôle rapide. Les corrigés ci-dessous rendent ces quatre moments visibles.

### 1 Reconnaître ce que l'on calcule

Énoncé

Par définition,  $f(0) = 1$  et  $f(1) = e$ . Comme  $f' = f$ ,  $f'(0) = 1$ . Ici l'image et la pente ont la même valeur, mais elles désignent des objets différents.  $e^{-2} = 1/e^2 > 0$ ;  $-e^2 < 0$ . Le signe moins dans un exposant donne ici un inverse; devant l'expression, il donne son opposé.

### 2 Réduire une écriture

Énoncé

On additionne les exposants d'un produit, on les soustrait dans un quotient et on les multiplie dans une puissance :

$$A = e^{3x-1+2-x} = e^{2x+1}, \quad B = e^{4x-(x+3)} = e^{3x-3}.$$

Pour  $C$ , l'exposant vaut  $3(-x+2) + 2x = -x+6$ . Donc  $C = e^{-x+6}$ . Les parenthèses protègent les signes.



**Vérifier.** Avec  $x = 0$ , l'écriture initiale de  $C$  vaut  $(e^2)^3 = e^6$ ; la forme obtenue donne aussi  $e^6$ . Un test numérique ne prouve pas l'identité, mais il détecte ici une erreur de signe.

### 3 Factoriser une somme

Énoncé

Puisque  $e^{x+1} = e^x e$ , la première expression vaut  $e^x(e+2)$ . La seconde vaut  $e^x(e^x-3)$ . Pour  $x = 0$ , l'affirmation de l'élève donne  $2 = 1$ , ce qui est faux. La bonne écriture est  $e^x + e^x = 2e^x$ ; la règle qui additionne les exposants concerne un produit.

### 4 Comparer exactement

Énoncé

L'exponentielle est strictement croissante. On classe donc les exposants  $-3 < -1 < 0 < 1/2 < 2$ , avec  $1 = e^0$  :

$$e^{-3} < e^{-1} < 1 < e^{1/2} < e^2.$$

Comme  $1/2 < 0,7 < 2$ , on a  $e^{1/2} < e^{0,7} < e^2$ . Un ordre sur les exposants fournit un ordre exact sur les valeurs.

## III • CORRECTIONS

# Corrections · 5 à 8

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

## 5 Étudier un signe

Énoncé

Le facteur  $e^{-x}$  est strictement positif pour tout réel  $x$ .  $A$  a donc le signe de  $2x - 6 = 2(x - 3)$  : négatif pour  $x < 3$ , nul pour  $x = 3$ , positif pour  $x > 3$ . Dans  $B$ , le coefficient  $-4$  est négatif et l'exponentielle positive :  $B(x) < 0$  partout. Elle ne s'annule jamais.

## 6 Revenir aux exposants

Énoncé

Par injectivité :  $5x - 1 = 2x + 8$ , d'où  $x = 3$ . Ensuite  $1 = e^0$ , donc  $3 - 2x = 0$  et  $x = 3/2$ . Enfin, le produit vaut  $e^{2x+1}$ . L'équation donne  $2x + 1 = 7$ , soit  $x = 3$ . Chaque équivalence utilise deux exponentielles égales, après simplification éventuelle.



**Vérifier.** En remplaçant  $x$  par 3, les deux membres des première et troisième équations coïncident ; dans la deuxième, l'exposant devient bien nul.

## 7 Réinvestir le second degré

Énoncé

La première équivaut à  $x^2 - 3x - 4 = 0$ . On reconnaît  $(x - 4)(x + 1) = 0$ , donc  $S = \{-1; 4\}$ . La seconde équivaut à  $x^2 - 2x = 0$ , soit  $x(x - 2) = 0$ . Donc  $S = \{0; 2\}$ . Il peut y avoir deux solutions en  $x$  même si l'exponentielle est injective : ce sont les exposants polynomiaux qui prennent la même valeur.

## 8 Repérer une impossibilité

Énoncé

Une exponentielle est strictement positive : les deux premières équations n'ont donc aucune solution. Pour la troisième,  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$  et  $e^x > 0$  ; leur produit est strictement positif. Il n'est jamais nul. Dans chaque cas, l'étude du signe permet de conclure avant toute manipulation compliquée.

### III • CORRECTIONS

## Corrections · 9 à 12

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 9 Comparer puis isoler

Énoncé

Par croissance,  $2 - 3x \leq x + 6 \iff -4x \leq 4 \iff x \geq -1$ . Donc  $[-1; +\infty[$ . Pour la seconde, on divise d'abord par  $-3$  :  $e^x < e^2$ . Le sens est inversé par cette division. Puis la croissance donne  $x < 2$ , soit  $]-\infty; 2[$ .

 **Vérifier.** À la borne  $x = -1$ , les exposants de la première inégalité valent tous deux 5 : la borne est incluse. À  $x = 2$ , la seconde inégalité devient une égalité, interdite par le signe strict.

### 10 Un intervalle ou deux morceaux ?

Énoncé

La première donne  $x^2 \leq 9$ , donc  $x \geq -3$  et  $x \leq 3$  :  $[-3; 3]$ . Dans la seconde,  $e^x > 0$ . Le produit  $(x - 1)(x + 2)$  est positif à l'extérieur des racines  $-2$  et  $1$ . On obtient  $x < -2$  ou  $x > 1$ , soit  $]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[$ . Les racines sont exclues car l'inégalité est stricte.

 **Vérifier.** Le nombre 0 vérifie la première inégalité, mais pas la seconde : cela confirme qu'un « et » dans la première question ne doit pas être réutilisé mécaniquement dans la seconde.

### 11 Une somme de fonctions

Énoncé

Les fonctions sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ . On dérive terme à terme :

$$f'(x) = 3e^x - 4x, \quad g'(x) = e^x - e^{-x}.$$

Dans  $h(x) = e^3 \times x$ ,  $e^3$  est une constante. Ainsi  $h'(x) = e^3$ . Ne pas confondre cette écriture avec  $e^{3x}$ , dont la dérivée vaut  $3e^{3x}$ .

### 12 Garder le coefficient intérieur

Énoncé

$u'(x) = 4 \times 3e^{3x-2} = 12e^{3x-2} > 0$  :  $u$  croît sur  $\mathbb{R}$ .  $v'(x) = -5 \times (-2)e^{-2x} = 10e^{-2x} > 0$  :  $v$  croît aussi.  $w'(x) = -(1/3)e^{1-x} < 0$  :  $w$  décroît. Le signe de l'exposant n'est pas un critère de variation ; c'est le coefficient de la dérivée qui intervient.

 **Vérifier.** Les trois exponentielles restent strictement positives. Les signes annoncés proviennent donc uniquement des coefficients 12, 10 et  $-1/3$ .

### III • CORRECTIONS

## Corrections • 13 à 16

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 13 Réparer deux dérivées

Énoncé

La première dérivée est  $-4e^{-4x}$ . Le coefficient de  $x$  dans l'exposant doit multiplier l'exponentielle. Pour la seconde, les deux facteurs varient :

$$((x+3)e^x)' = 1 \times e^x + (x+3)e^x = (x+4)e^x.$$

Le résultat proposé a omis la contribution de la dérivée du second facteur.

### 14 Un produit et son minimum

Énoncé

1. La règle du produit donne

$$f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x.$$

2. Comme  $e^x > 0$ , la dérivée a le signe de  $x-1$  : elle est négative avant 1, nulle en 1, positive après. Ainsi  $f$  décroît sur  $[-2; 1]$  puis croît sur  $[1; 3]$ .

| $x$     | -2         | 1    | 3     |
|---------|------------|------|-------|
| $f'(x)$ | -          | 0    | +     |
| $f(x)$  | $-4e^{-2}$ | $-e$ | $e^3$ |

3. Le minimum est  $f(1) = -e$ . Aux extrémités,  $f(-2) = -4e^{-2}$  et  $f(3) = e^3$ .

4. Le signe de  $f$  change en 2 parce que  $f(2) = 0$ , tandis que ses variations changent en 1 parce que  $f'(1) = 0$  avec changement de signe. Zéro d'une fonction et extremum sont deux notions différentes.



**Vérifier.** Le point critique 1 appartient à l'intervalle. La dérivée y change de  $-$  vers  $+$  : il s'agit bien d'un minimum, sans qu'il soit nécessaire de comparer des valeurs décimales.

### 15 Un quotient, un domaine

Énoncé

1. Il faut  $x+1 \neq 0$ , donc  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

2. Sur le domaine, la règle du quotient donne

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

3. Le facteur  $e^x$  et le carré du dénominateur sont positifs :  $f'$  a le signe de  $x$ . Ainsi  $f$  décroît sur  $] -\infty; -1[$  et sur  $] -1; 0[$ , puis croît sur  $[0; +\infty[$ .

4. Sur  $] -1; +\infty[$ , le minimum vaut  $f(0) = 1$ . On ne réunit pas les deux intervalles décroissants en franchissant  $-1$ , car la fonction n'y est pas définie; aucune flèche de variation ne peut traverser cette coupure.



**Vérifier.** Le carré  $(x + 1)^2$  ne change jamais le signe de la dérivée, mais il rappelle que  $x = -1$  reste exclu. Une étude qui tracerait une seule flèche à travers  $-1$  serait donc incorrecte.

## 16 Deux exponentielles, une borne

Énoncé

1.  $f'(x) = e^x - e^{-x}$ . Par croissance,

$$e^x > e^{-x} \iff x > -x \iff x > 0.$$

La dérivée est donc négative pour  $x < 0$ , nulle en 0, positive pour  $x > 0$ .

2. La fonction décroît sur  $] -\infty; 0]$ , puis croît sur  $[0; +\infty[$ .

3. Son minimum vaut  $f(0) = 2$ . Donc  $f(x) \geq 2$  pour tout réel  $x$ , avec égalité seulement en 0.

4. L'équation  $f(x) = 2$  demande précisément l'égalité dans cette borne. Elle a donc l'unique solution  $x = 0$ .

### III • CORRECTIONS

## Corrections · 17 à 20

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 17 Une tangente à construire

Énoncé

1.  $f'(x) = 2e^{2x}$ ; donc  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 2$ .
2. La tangente en 0 est  $y = f'(0)x + f(0) = 2x + 1$ .
3. Pour obtenir  $e^{0,04} = f(0,02)$ , on utilise  $x = 0,02$ , pas 0,04. Ainsi

$$f(0,02) \simeq 1 + 2 \times 0,02 = 1,04.$$

4. La valeur calculée est 1,04081 : l'écart vaut environ 0,00081. L'approximation linéaire est cohérente parce que l'abscisse utilisée est proche de 0.

 **Vérifier.** La droite  $y = 2x + 1$  passe par  $(0; 1)$  et possède la pente  $2 = f'(0)$ . Ces deux vérifications valident l'équation de la tangente avant de l'utiliser.

### 18 Une comparaison de courbes

Énoncé

On applique la propriété à  $u = 2x : e^{2x} \geq 1 + 2x$ , avec égalité seulement si  $x = 0$ . En retranchant  $2x$  puis en ajoutant 3, on obtient  $H(x) \geq 4$ . La fonction est donc strictement positive, avec minimum 4 en 0. L'équation  $H(x) = 0$  n'a pas de solution. La borne 4 est plus informative qu'un simple signe positif.

 **Vérifier.** L'égalité dans  $e^u \geq 1 + u$  exige  $u = 0$ . Ici  $u = 2x$ , donc elle se produit seulement pour  $x = 0$ ; on vérifie alors  $H(0) = 4$ .

### 19 Une dérivée nulle en un point

Énoncé

On utilise la règle du produit :

$$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x} = -x^2e^{-x}.$$

La dérivée est négative pour  $x \neq 0$  et nulle seulement en 0. La fonction décroît de part et d'autre de 0; elle ne change pas de sens de variation. La tangente y est horizontale ( $f'(0) = 0$ ), mais ce point n'est pas un extremum.

### 20 Conclure à une borne précise

Énoncé

1. La règle du produit donne

$$f'(x) = [2x + 4 - (x^2 + 4x + 6)]e^{-x} = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

2. Or  $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$  et  $e^{-x} > 0$ . Donc  $f'(x) < 0$  sur  $[0; 3]$ .
3. La fonction est strictement décroissante : elle passe de  $f(0) = 6$  à  $f(3) = 27e^{-3}$ .
4. Pour tout  $x \in [0; 3]$ ,

$$27e^{-3} \leq f(x) \leq 6.$$

 **Vérifier.** Comme la fonction décroît sur tout  $[0; 3]$ , la plus grande valeur se trouve à la borne gauche et la plus petite à la borne droite. Le sens des deux inégalités est ainsi contrôlé.

### III • CORRECTIONS

## Corrections · 21 à 24

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 21 Un quotient toujours défini

Énoncé

1.  $e^x + 2 > 2 > 0$  : le dénominateur ne s'annule jamais. Le domaine est donc  $\mathbb{R}$ .

2. La règle du quotient donne

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2) - e^x e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 2)^2} > 0.$$

3. La dérivée est strictement positive :  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4. Le numérateur est positif et strictement plus petit que le dénominateur positif. Ainsi

$$0 < \frac{e^x}{e^x + 2} < 1.$$

Ces inégalités ne sont jamais des égalités.

### 22 Retrouver deux paramètres

Énoncé

Le passage par le point donne  $f(0) = a + b = 5$ . La dérivée est  $f'(x) = ae^x$  ; la pente donne  $f'(0) = a = 2$ . D'où  $b = 3$  et  $f(x) = 2e^x + 3$ . La tangente est  $y = f'(0)x + f(0) = 2x + 5$ . Les deux données jouent des rôles distincts : l'une fixe une hauteur, l'autre une pente.

### 23 Identifier un modèle

Énoncé

1.  $Q(0) = Q_0 e^0 = Q_0$ , donc  $Q_0 = 40$  unités.

2. Ensuite  $40e^{2k} = 40e^{-0,6}$  donne  $2k = -0,6$  par injectivité, donc

$$k = -0,3 \text{ h}^{-1}.$$

3. En trois heures, le facteur est  $e^{3k} = e^{-0,9} \simeq 0,407$ . La quantité est multipliée par environ 0,407, soit une diminution d'environ 59,3 %.

4. Le coefficient  $k$  est négatif et le facteur est compris entre 0 et 1 : ces deux informations décrivent bien une diminution.



**Véifier.**  $k$  est négatif et le facteur sur trois heures est compris entre 0 et 1 : une diminution était attendue. De plus  $Q(2) = 40e^{-0,6}$  est bien retrouvé.

### 24 Comparer deux évolutions

Énoncé

1.  $A(0) = 30$  tandis que  $B(0) = 30e > 30$ . Le modèle  $B$  est initialement le plus grand.

2. Le facteur 30 est positif. L'égalité se ramène à

$$0,2t = 0,05t + 1 \iff 0,15t = 1 \iff t = \frac{20}{3} \simeq 6,67.$$

3. De même,

$$A(t) > B(t) \iff 0,15t > 1 \iff t > \frac{20}{3}.$$

Avant cet instant,  $B$  est plus grand ; après,  $A$  est plus grand.

4. À  $t = 0$ , le classement obtenu donne bien  $A(0) < B(0)$ . On conserve l'instant exact  $20/3$  pour découper correctement l'intervalle.



**Vérifier.** À  $t = 0$ ,  $A(0) = 30$  alors que  $B(0) = 30e > 30$  : le classement annoncé avant le croisement est cohérent.

### III • CORRECTIONS

## Corrections • 25 à 26

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 25 Un pourcentage par jour

Énoncé

Le rapport  $N(t+1)/N(t) = e^{0,08} \simeq 1,083287$  est constant. Le pourcentage quotidien vaut donc  $100(e^{0,08} - 1) \simeq 8,33\%$ . La différence vaut  $N(t)(e^{0,08} - 1)$ . Le second facteur est constant, mais  $N(t)$  augmente : les accroissements augmentent aussi. Le coefficient 0,08 du modèle n'est donc pas exactement une augmentation de 8 % par jour.



**Véifier.** Le facteur  $e^{0,08}$  est supérieur à 1, conformément à la croissance du modèle. Un pourcentage exact de 8 % correspondrait au facteur 1,08, différent de  $e^{0,08}$ .

### 26 La moitié, à quel moment ?

Énoncé

$Q'(t) = -36e^{-0,4t} < 0$ , donc  $Q$  décroît strictement. Les deux valeurs encadrent 45 : le temps où la quantité vaut la moitié de 90 est entre 1,73 et 1,74 h. La première heure entière satisfaisant la condition est 2 h :  $Q(1) = 90e^{-0,4} \simeq 60,33 > 45$  et  $Q(2) = 90e^{-0,8} \simeq 40,44 < 45$ . Un temps approché et le premier entier admissible sont deux réponses différentes.



**Véifier.** La décroissance stricte garantit qu'après le franchissement il n'y aura pas de retour au-dessus de 45. C'est pourquoi le contrôle des deux entiers 1 et 2 suffit.

### III • CORRECTIONS

## Corrections · 27 à 28

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 27 Retrouver la suite

Énoncé

On a  $u_0 = 12$  et

$$u_{n+1} = 12e^{-0,25n-0,25} = e^{-0,25}u_n.$$

La raison est  $q = e^{-0,25} \simeq 0,7788$ , comprise entre 0 et 1. Comme les termes sont positifs, la suite est strictement décroissante. Pour chaque entier  $n$ ,  $12e^{-0,25n} > 0$ . La suite peut devenir très petite, mais aucun terme n'est exactement nul.

### 28 Quatre pas d'Euler

Énoncé

On part de  $y_0 = 1$ . Chaque étape multiplie par  $1 + h = 1,25$  :

$$y_1 = 1,25, \quad y_2 = 1,5625, \quad y_3 = 1,953125, \quad y_4 = 2,44140625.$$

L'erreur  $e - y_4$  vaut environ 0,27688. Ces valeurs suivent les tangentes successives approximatives, pas la courbe exacte. Le calcul donne aussi  $y_4 = (1 + 1/4)^4$ , ce qui permet de contrôler les quatre multiplications.

### III • CORRECTIONS

## Corrections · 29 à 30

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 29 Une boucle de seuil

Énoncé

On augmente  $n$  tant que la quantité est insuffisante :

```
from math import exp
n = 0
while 20*exp(0.3*n) < 100:
    n = n + 1
print(n)
```

Le programme renvoie 6. En effet, à  $n = 5$ , on obtient environ  $89,63 < 100$ , et à  $n = 6$ , environ  $120,99 \geq 100$ . La croissance garantit que tous les entiers antérieurs à 5 échouent aussi. Le test strict dans la boucle correspond bien à la condition finale large.

 **Vérifier.** Le rang précédent échoue et le rang annoncé réussit : cette double vérification établit que 6 est bien le *premier* entier convenable.

### 30 Conserver un encadrement

Énoncé

L'exponentielle croît : si  $e^m < 3$ , le seuil est à droite de  $m$ , donc on remplace  $a$  par  $m$ . Sinon, on remplace  $b$  par  $m$ . Première étape :  $m = 1,5$ , avec  $e^m > 3$ , donc nouvel intervalle  $[1; 1,5]$ . Deuxième étape :  $m = 1,25$ , encore avec  $e^m > 3$ , donc  $[1; 1,25]$ . On conserve une valeur inférieure à 3 au bord gauche et une valeur supérieure à 3 au bord droit. Il serait incorrect d'utiliser le test du cours sur une fonction décroissante sans l'adapter.

 **Vérifier.** Après chaque étape,  $e^a < 3 < e^b$  reste vrai. Cet invariant est le contrôle essentiel d'une dichotomie.

### III • CORRECTIONS

## Corrections · 31 à 32

Repère la règle, le calcul et le contrôle.

### 31 Une réponse maximale

Énoncé

1. La dérivée du produit vaut

$$R'(t) = e^{-t/2} - \frac{1}{2}(t+1)e^{-t/2} = \frac{1-t}{2}e^{-t/2}.$$

2. L'exponentielle est positive, donc  $R'$  a le signe de  $1-t$ . Ainsi  $R$  croît sur  $[0; 1]$ , puis décroît sur  $[1; 6]$ .

|         |   |             |           |
|---------|---|-------------|-----------|
| $t$     | 0 | 1           | 6         |
| $R'(t)$ | + | 0           | -         |
| $R(t)$  | 1 | $2e^{-1/2}$ | $7e^{-3}$ |

3. Le maximum vaut  $R(1) = 2e^{-1/2} \simeq 1,2131$ .

4.  $R(0) = 1$  et  $R'(0) = 1/2$ , donc la tangente en 0 est  $y = 1 + t/2$ .

5. Le produit associe le facteur  $t+1$ , croissant, et le facteur  $e^{-t/2}$ , décroissant. Observer seulement le second ne permet pas de savoir lequel des deux effets domine ; le signe de la dérivée tranche la question.

### 32 Bilan : dérivée, borne et tangente

Énoncé

1. La règle du produit donne

$$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = [2x-2+x^2-2x+2]e^x = x^2e^x.$$

2. Cette dérivée est positive pour  $x > 0$  et nulle en 0. La fonction est strictement croissante sur  $[0; 3]$ . Son minimum vaut  $f(0) = 2$  et son maximum  $f(3) = 5e^3$ .

3. La tangente en 0 est  $y = f'(0)x + f(0) = 2$ . Comme  $f(x) \geq 2$  sur l'intervalle, la courbe est au-dessus de cette droite, avec égalité seulement en 0.

4. Une dérivée nulle en un point donne une tangente horizontale en ce point. Pour conclure qu'une fonction est constante sur un intervalle, il faudrait une dérivée nulle en tout point de cet intervalle. Ici, elle est strictement positive dès que  $x > 0$ .

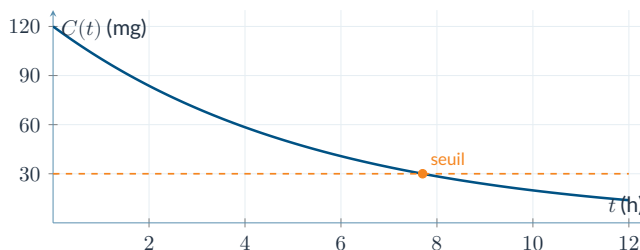
### III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

## Problème 33 – élimination

Relier variation continue, évolution horaire et franchissement d'un seuil.

### 33 Suivre l'élimination d'une substance

Énoncé



1. À l'instant initial,

$$C(0) = 120e^0 = 120 \text{ mg.}$$

L'échantillon contient donc initialement 120 mg de substance.

2. La dérivée est

$$C'(t) = 120 \times (-0,18)e^{-0,18t} = -21,6e^{-0,18t}.$$

Une exponentielle étant strictement positive,  $C'(t) < 0$  sur  $[0; 12]$ . La masse est donc strictement décroissante pendant l'expérience.

3. Pour tout  $t$  tel que  $t$  et  $t + 1$  appartiennent à l'intervalle,

$$\frac{C(t+1)}{C(t)} = \frac{120e^{-0,18(t+1)}}{120e^{-0,18t}} = e^{-0,18} \simeq 0,8353.$$

En une heure, environ 83,53 % de la masse précédente subsiste. La diminution est donc d'environ

$$100(1 - 0,8353) = 16,47 \text{ \%}.$$

Ce pourcentage porte sur la masse présente au début de chaque heure; la perte en milligrammes n'est pas constante.

4. Aux instants entiers,

$$u_n = C(n) = 120e^{-0,18n} = 120(e^{-0,18})^n.$$

La suite est géométrique, de premier terme  $u_0 = 120$  et de raison  $q = e^{-0,18} \simeq 0,8353$ .

5. À la calculatrice,

$$C(4) = 120e^{-0,72} \simeq 58,4 \text{ mg}, \quad C(8) = 120e^{-1,44} \simeq 28,4 \text{ mg}.$$

Les valeurs diminuent et restent positives, conformément à l'étude précédente.

6. La fonction est continue et strictement décroissante. Or

$$C(7,70) > 30 \quad \text{et} \quad C(7,71) < 30.$$

L'unique instant  $\tau$  où  $C(\tau) = 30$  vérifie donc

$$7,70 < \tau < 7,71 \text{ h.}$$

Juste après cet instant, la masse est sous le seuil.

7. On contrôle les deux heures consécutives qui entourent le franchissement :

$$C(7) \simeq 34,0 \text{ mg} > 30 \text{ mg}, \quad C(8) \simeq 28,4 \text{ mg} < 30 \text{ mg}.$$

La première heure entière répondant à la consigne est donc 8 h.

8. On a  $C(0) = 120$  et  $C'(0) = -21,6$ . La tangente en 0 est

$$y = 120 - 21,6t.$$

Pour  $t = 0,1$ , elle donne  $C(0,1) \simeq 117,84$  mg. La valeur du modèle est 117,859 mg environ : l'écart est inférieur à 0,02 mg.

9. La droite devient négative dès que  $120 - 21,6t < 0$ , soit  $t > 50/9 \simeq 5,56$ . Ce n'est pas la courbe du modèle : c'est seulement son approximation au voisinage de 0. Le modèle exponentiel, lui, reste strictement positif. Une tangente peut être très précise localement et absurde si on la prolonge trop loin.



**Véifier.** Trois descriptions concordent :  $C' < 0$ , la raison de la suite est comprise entre 0 et 1, et les valeurs calculées diminuent.

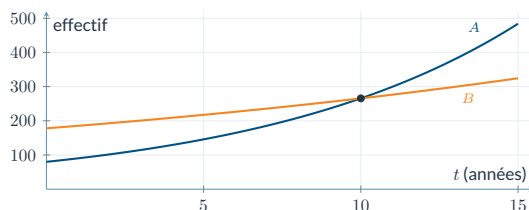
### III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

## Problème 34 – deux populations

Comparer des croissances relatives sans confondre valeur initiale et rythme.

### 34 Comparer deux populations

Énoncé



1.  $A(0) = 80$  et  $B(0) = 80e^{0,8} \simeq 178$ . La population  $B$  est donc initialement la plus grande : son avance vient du terme  $0,8$  dans l'exposant.

2. Sur une année,

$$\frac{A(t+1)}{A(t)} = e^{0,12} \simeq 1,1275, \quad \frac{B(t+1)}{B(t)} = e^{0,04} \simeq 1,0408.$$

Les taux relatifs sont donc d'environ 12,75 % et 4,08 %. Le modèle  $A$  croît relativement plus vite.

3. Les dérivées sont

$$A'(t) = 9,6e^{0,12t} > 0, \quad B'(t) = 3,2e^{0,04t+0,8} > 0.$$

Les deux effectifs augmentent sur  $[0; 15]$ . Cela ne dit pas encore lequel est le plus grand.

4. Les facteurs 80 sont égaux et positifs. Par injectivité de l'exponentielle,

$$A(t) = B(t) \iff 0,12t = 0,04t + 0,8 \iff 0,08t = 0,8 \iff t = 10.$$

Les deux modèles donnent le même effectif au bout de dix ans.

5. De la même manière,

$$A(t) > B(t) \iff 0,08t > 0,8 \iff t > 10.$$

Ainsi  $B$  domine avant dix ans, les effectifs sont égaux à dix ans, puis  $A$  domine.

6. En divisant les deux expressions positives,

$$\frac{A(t)}{B(t)} = e^{0,12t - (0,04t + 0,8)} = e^{0,08t - 0,8}.$$

Ce quotient est inférieur à 1 avant 10, égal à 1 en 10, puis supérieur à 1. Il encode exactement le même classement.

7. Au bout de quinze ans,

$$A(15) = 80e^{1,8} \simeq 484, \quad B(15) = 80e^{1,4} \simeq 324.$$

Les effectifs étant en milliers, le modèle  $A$  dépasse alors le modèle  $B$  d'environ 160 000 individus.

8. Pour les instants entiers,

$$a_n = 80 (e^{0,12})^n, \quad b_n = 80e^{0,8} (e^{0,04})^n.$$

Les suites sont géométriques, de raisons respectives  $e^{0,12}$  et  $e^{0,04}$ .

9. Deux fonctions croissantes peuvent se croiser si celle qui part plus bas possède un rythme relatif supérieur. Ici, l'égalité exacte donne  $t = 10$  : l'élève confond croissance de chaque fonction et comparaison des deux fonctions.



**Véifier.** À  $t = 0$ , on retrouve  $A < B$ ; à  $t = 15$ , on obtient  $A > B$ . Le changement de classement autour de  $t = 10$  est cohérent.

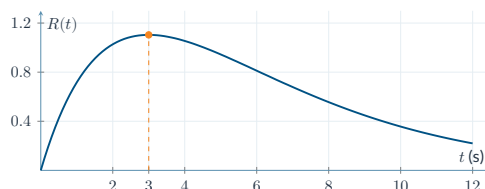
### III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

## Problème 35 – le capteur

Un facteur décroissant ne suffit pas à décider du sens d'un produit.

### 35 Régler la réponse d'un capteur

Énoncé



1.  $R(0) = 0$ . Douze secondes plus tard,

$$R(12) = 12e^{-4} \simeq 0,220.$$

Le signal part de zéro et redevient faible après douze secondes; ces valeurs ne localisent pas son maximum.

2. La règle du produit donne

$$R'(t) = e^{-t/3} - \frac{t}{3}e^{-t/3} = \left(1 - \frac{t}{3}\right)e^{-t/3} = \frac{3-t}{3}e^{-t/3}.$$

3. Le facteur exponentiel est strictement positif. La dérivée a donc le signe de  $3 - t$  : positive avant 3, nulle en 3, négative après.

| $t$     | 0 | 3                                                                                    | 12 |       |            |
|---------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|----|-------|------------|
| $R'(t)$ |   | +                                                                                    | 0  | −     |            |
| $R(t)$  | 0 |  |    | $3/e$ | $12e^{-4}$ |

4. Le maximum est atteint pour  $t = 3$  s et vaut

$$R(3) = 3e^{-1} = \frac{3}{e} \simeq 1,104.$$

5.  $R'(0) = 1$  et  $R(0) = 0$ . La tangente en 0 est donc  $y = t$ . Elle fournit l'approximation  $R(0,12) \simeq 0,12$ .

6. Le modèle donne

$$R(0,12) = 0,12e^{-0,04} \simeq 0,115.$$

L'écart avec la tangente vaut environ 0,005. Il reste faible parce que 0,12 est proche du point de contact 0.

7. D'après les variations, parmi les instants pairs, seuls 2 et 4 peuvent être les meilleurs candidats : le signal croît jusqu'à 3, puis décroît. Or

$$\frac{R(4)}{R(2)} = \frac{4e^{-4/3}}{2e^{-2/3}} = 2e^{-2/3} \simeq 2 \times 0,5134 = 1,0268 > 1.$$

Ainsi  $R(4) > R(2)$  : le meilleur instant pair est 4 s.

8. Le facteur  $e^{-t/3}$  décroît, mais le facteur  $t$  croît. On ne peut pas déduire le sens de variation d'un produit en observant un seul de ses facteurs. Le calcul de  $R'$  mesure l'effet combiné.

9. Sans contrainte, le réglage optimal est  $t = 3$  s et le signal vaut  $3/e$ . Avec des mesures uniquement aux instants pairs, 3 est interdit; la comparaison des candidats voisins conduit à  $t = 4$  s. L'optimum d'un modèle continu ne doit pas être arrondi sans contrôle.

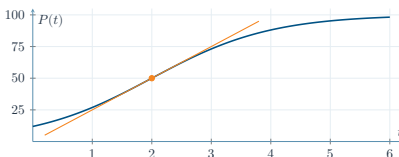
### III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

## Problème 36 – saturation

Relier quotient, dérivée, symétrie et seuil.

### 36 Étudier un modèle de saturation

Énoncé



1. Comme  $e^{2-t} > 0$ , le dénominateur  $1 + e^{2-t}$  est strictement supérieur à 1 : il ne s'annule jamais. De plus,

$$0 < \frac{100}{1 + e^{2-t}} < 100.$$

La fonction est définie sur  $[0; 6]$  et ses valeurs restent entre 0 et 100.

2.  $P(2) = 100/(1 + e^0) = 50$ . Au temps 2, le processus est réalisé à 50 %.

3. Posons  $v(t) = 1 + e^{2-t}$ . Alors  $v'(t) = -e^{2-t}$  et

$$P'(t) = \frac{0 \times v(t) - 100v'(t)}{v(t)^2} = \frac{100e^{2-t}}{(1 + e^{2-t})^2}.$$

4. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. Donc  $P'(t) > 0$  sur  $[0; 6]$  : le pourcentage augmente strictement pendant toute la durée étudiée.

5. On trouve

$$P(0) = \frac{100}{1 + e^2} \simeq 11,9, \quad P(6) = \frac{100}{1 + e^{-4}} \simeq 98,2.$$

Le modèle passe donc d'environ 11,9 % à 98,2 %, sans atteindre 100 %.

6. Puisque  $P(2) = 50$  et

$$P'(2) = \frac{100}{(1 + 1)^2} = 25,$$

la tangente est  $y = 25(t - 2) + 50 = 25t$ . Elle donne  $P(2,04) \simeq 51$ . La valeur réelle est environ 50,9999 : l'approximation locale est excellente.

7. Pour un réel  $h$  admissible,

$$P(2 + h) = \frac{100}{1 + e^{-h}} = \frac{100e^h}{1 + e^h}, \quad P(2 - h) = \frac{100}{1 + e^h}.$$

Leur somme vaut  $100(e^h + 1)/(1 + e^h) = 100$ . Les valeurs prises à égale distance de 2 se complètent donc à 100 %.

8. Le dénominateur est positif. On peut transformer l'inégalité sans changer son sens :

$$P(t) \geq 50 \iff 100 \geq 50(1 + e^{2-t}) \iff e^{2-t} \leq 1 = e^0 \iff 2 - t \leq 0.$$

Sur l'intervalle, la solution est  $[2; 6]$ .

9. La fonction est strictement croissante et les valeurs données encadrent 90. L'unique instant  $\tau$  tel que  $P(\tau) = 90$  vérifie

$$4,19 < \tau < 4,20.$$

10. Le nombre  $25 = P'(2)$  est le rythme instantané lorsque le processus vaut 50 %, pas une hausse constante :  $P'(4) \simeq 10,5$ . La tangente orange distingue le rythme local de l'évolution globale.



**Vérifier.**  $P$  croît et reste sous 100, conformément à  $P' > 0$  et au graphique.

## IV • CORRECTIONS DES ÉVALUATIONS

# Contrôle E1 – produit et extremum

Une copie complète isole le facteur positif avant de conclure sur le signe.

### E1 Contrôle ciblé – produit et extremum

Énoncé

1.  $f(0) = 1$  et  $f(4) = 9e^{-4} \simeq 0,165$ .

2. Les deux facteurs dépendent de  $x$ . Par la règle du produit,

$$f'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1)(-e^{-x}) = [2 - (2x + 1)]e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}.$$

3. Comme  $e^{-x} > 0$ ,  $f'(x)$  a le signe de  $1 - 2x$ . Cette expression est positive si  $x < 1/2$ , nulle en  $1/2$ , puis négative.

| $x$     | 0 | 1/2         | 4         |   |
|---------|---|-------------|-----------|---|
| $f'(x)$ |   | +           | 0         | − |
| $f(x)$  | 1 | $2e^{-1/2}$ | $9e^{-4}$ |   |

4. Le maximum est atteint pour  $x = 1/2$  et vaut

$$f(1/2) = 2e^{-1/2} \simeq 1,213.$$

5.  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$ . La tangente en 0 a pour équation  $y = x + 1$ . Elle donne  $f(0,02) \simeq 1,02$ .

6. L'écart avec 1,019407 vaut environ 0,000593, soit moins de  $6 \times 10^{-4}$ . La précision est bonne parce que 0,02 est proche de 0; loin du contact, la droite n'épouse plus nécessairement la courbe.

## IV • CORRECTIONS DES ÉVALUATIONS

# Contrôle E2 – refroidissement

Distinguer température, écart à la pièce et rythme instantané.

## E2 Contrôle de synthèse – refroidissement

Énoncé

1.  $T(0) = 20 + 60 = 80^\circ\text{C}$ . Le nombre 20 représente la température de la pièce et 60 l'écart initial entre l'objet et la pièce :  $80 - 20 = 60$ .

2. La dérivée est

$$T'(t) = 60 \times (-0,3)e^{-0,3t} = -18e^{-0,3t}.$$

Elle est strictement négative sur  $[0; 6]$ ; la température diminue donc pendant les six heures.

3. L'écart à la pièce aux heures entières est

$$u_n = T(n) - 20 = 60e^{-0,3n} = 60(e^{-0,3})^n.$$

La suite est géométrique, de premier terme  $u_0 = 60$  et de raison  $q = e^{-0,3}$ .

4. Comme  $q \simeq 0,7408$ , il subsiste environ 74,08 % de l'écart précédent chaque heure. L'écart diminue donc d'environ 25,92 % par heure.

5. La fonction est strictement décroissante. Comme

$$T(2,31) > 50 \quad \text{et} \quad T(2,32) < 50,$$

l'unique instant  $\tau$  où  $T(\tau) = 50$  vérifie  $2,31 < \tau < 2,32$  h.

6. On contrôle les deux entiers voisins :

$$T(2) = 20 + 60e^{-0,6} \simeq 52,93^\circ\text{C}, \quad T(3) = 20 + 60e^{-0,9} \simeq 44,39^\circ\text{C}.$$

La première heure entière où la température est sous  $50^\circ\text{C}$  est donc 3 h.

7.  $T(0) = 80$  et  $T'(0) = -18$ . La tangente en 0 est

$$y = 80 - 18t.$$

Elle donne  $T(0,1) \simeq 78,2^\circ\text{C}$ . Le modèle donne environ  $78,23^\circ\text{C}$ , ce qui confirme la qualité de l'approximation à court terme.

8. Le nombre 18 est l'opposé de  $T'(0)$  : il représente un rythme instantané initial de  $18^\circ\text{C} \cdot \text{h}^{-1}$ . Il ne s'agit pas d'une perte répétée identique chaque heure. Par exemple, la baisse est d'environ  $15,55^\circ\text{C}$  pendant la première heure, puis  $11,52^\circ\text{C}$  pendant la deuxième. Le refroidissement ralentit à mesure que l'objet se rapproche de la température de la pièce.



**Vérifier.** La température baisse mais reste supérieure à  $20^\circ\text{C}$  :  $T(t) = 20 +$  une quantité strictement positive.

## BILAN

# Ce que tu dois savoir refaire

Une propriété choisie vaut mieux qu'une formule appliquée au hasard.

|           |                                                                                                                       |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Définir   | $\exp' = \exp, \exp(0) = 1; e = \exp(1); e^x = \exp(x).$                                                              |
| Calculer  | Produit : additionner les exposants. Quotient : soustraire les exposants. Une somme se factorise si c'est possible.   |
| Comparer  | $e^x > 0; e^u = e^v \iff u = v; e^u < e^v \iff u < v.$                                                                |
| Dériver   | $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ ; conserver aussi les règles du produit et du quotient.                                     |
| Étudier   | Factoriser la dérivée, isoler les facteurs positifs, étudier le signe restant, construire les variations et conclure. |
| Modéliser | $Q_0 e^{kt}$ : rapport constant sur des durées égales; aux instants entiers, suite géométrique de raison $e^k$ .      |
| Approcher | Tangente près du contact; encadrement numérique d'un seuil; méthode d'Euler pour construire des valeurs approchées.   |

## Reprendre le bon obstacle

Calculs et règles : exercices 1 à 4. Équations et signes : 5 à 10. Dérivées : 11 à 15. Bornes et tangentes : 16 à 22. Modèles et calcul numérique : 23 à 30. Premières synthèses : 31 et 32. Pour un entraînement complet en plusieurs étapes : problèmes 33 à 36. Termine par l'évaluation 1 pour les automatismes, puis par l'évaluation 2 en conditions de contrôle.



### POINT DE VIGILANCE Les quatre confusions à éviter

$e^{-x}$  n'est pas  $-e^x$ ;  $e^a + e^b$  n'est pas  $e^{a+b}$ ; une exponentielle positive n'impose pas qu'une fonction composée croisse; une dérivée nulle en un point n'impose pas une fonction constante.

## Conditions d'utilisation

© 2026 Rémi Piau – Alors on science !

L'utilisation en classe, la projection, l'impression et la photocopie, intégrales ou partielles, sont autorisées pour un usage personnel ou pour les élèves directement accompagnés, sans vente des copies et en conservant le nom de l'auteur, la marque et les présentes mentions.

La diffusion numérique à des tiers, la mise en ligne, la publication de versions modifiées et l'exploitation commerciale du document ou de ses extraits nécessitent l'autorisation écrite préalable de Rémi Piau. Toute commercialisation est réservée à Alors on science!, sauf autorisation écrite.

Tous les autres droits sont réservés, sous réserve des exceptions prévues par la loi.