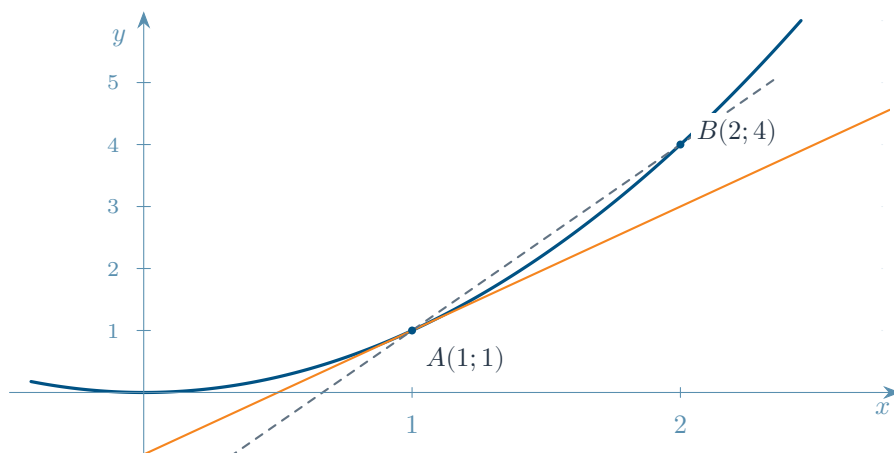




Dérivation et variations

Comprendre une pente. Étudier une évolution.

Choisir et justifier un optimum.



Bleu : la courbe. Orange : la tangente en A . Pointillés : la sécante (AB) .

- I **Cours et savoir-faire** Les notions, les choix et les étapes.
- II **Exercices** 32 entraînements et 4 problèmes de synthèse.
- III **Corrections détaillées** Les raisons, les calculs et les contrôles.
- IV **Évaluations** Deux sujets chronométrés pour préparer le contrôle.

MODE D'EMPLOI

Apprendre, puis s'entraîner

Comprendre une méthode permet de l'adapter à une situation nouvelle.

Accès directs : cours p. 3; exercices p. 19; problèmes p. 30; évaluations p. 34; corrections p. 36.

Comment avancer dans ce chapitre

Lis une notion, puis refais l'exemple sans regarder les lignes suivantes. Les questions « À toi de jouer » servent à vérifier immédiatement une idée. Leurs réponses sont données juste après : masque-les le temps de chercher.

**DÉFINITION** Comprendre les mots

Les définitions nomment les objets et donnent le sens des symboles.

**SAVOIR-FAIRE** Choisir une démarche

Les savoir-faire montrent comment reconnaître la situation, choisir un outil et terminer le calcul.

**POINT DE VIGILANCE** Repérer une confusion

Une erreur expliquée est plus utile qu'une règle mémorisée sans condition.



Vérifier. Une valeur cohérente, une unité correcte ou une vérification par substitution aide à détecter une erreur. Ce contrôle complète le raisonnement.

Les trois temps de l'entraînement

Les exercices 1 à 10 installent les bases; 11 à 24 demandent de choisir et combiner les méthodes; 25 à 32 proposent des problèmes et des lectures critiques; 33 à 36 sont de vrais problèmes de synthèse en plusieurs questions. Termine par les deux évaluations chronométrées.



Le déclic. Lorsque tu corriges un exercice, explique à voix haute pourquoi chaque étape est possible. Refaire seulement les nombres ne suffit pas à comprendre la méthode.

I • PRÉREQUIS

Ce qui change et ce qui reste

Une image est une hauteur ; un taux décrit une variation.

Lire $f(a)$ et $f(a + h)$

Pour $f(x) = x^2 - 3x + 2$, calculer $f(2)$ signifie remplacer *chaque* x par 2 : $f(2) = 4 - 6 + 2 = 0$. Calculer $f(2 + h)$ demande de remplacer *chaque* x par **tout** le nombre $2 + h$:

$$\begin{aligned} f(2 + h) &= (2 + h)^2 - 3(2 + h) + 2 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 2 = h + h^2. \end{aligned}$$



POINT DE VIGILANCE Les parenthèses protègent le calcul

$(2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$, et non $4 + h^2$. De même, $-3(2 + h) = -6 - 3h$. Ces deux rappels évitent la plupart des erreurs dans les taux de variation.

Une pente se calcule entre deux points

Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$, le coefficient directeur de (AB) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

L'ordre doit être le même au numérateur et au dénominateur. Entre $A(1; 4)$ et $B(3; 0)$: $m = (0 - 4)/(3 - 1) = -2$. Pour une avancée horizontale de 1, la droite descend de 2.



Le déclic. Le coefficient directeur ne se lit pas à l'angle apparent de la droite : les échelles des axes peuvent être différentes. Utilise les coordonnées.



À TOI DE JOUER Trois petits calculs

Pour $g(x) = 2x^2 - 1$, calcule $g(1)$, développe $g(1 + h)$, puis simplifie $g(1 + h) - g(1)$.

Réponse pour te vérifier : $g(1) = 1$. Puis $g(1 + h) = 1 + 4h + 2h^2$ et la différence vaut $4h + 2h^2$.

I • SAVOIR-FAIRE 1

Mesurer une variation moyenne

Comparer la variation verticale à la variation horizontale.



DÉFINITION Taux de variation

Si a et b appartiennent au domaine de f et $a \neq b$, le taux de variation entre a et b est

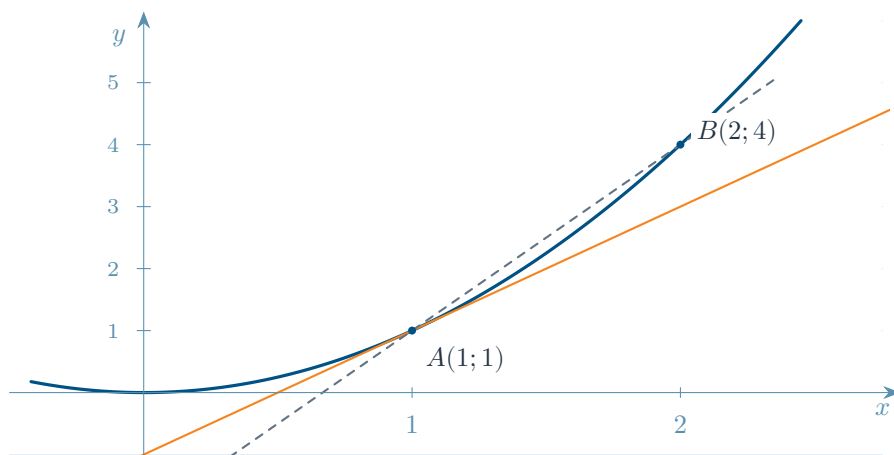
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est la pente de la **sécante**, droite passant par $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.



SAVOIR-FAIRE Avec la fonction carré

Pour $f(x) = x^2$, entre 1 et 2, les images sont 1 et 4. Le taux vaut $(4 - 1)/(2 - 1) = 3$. Entre 1 et 1,1, il vaut $(1,21 - 1)/0,1 = 2,1$. La pente dépend du deuxième point choisi.



La droite en pointillés relie A et B : sa pente vaut 3. La droite orange montre la direction de la courbe au voisinage immédiat de A : nous allons comprendre pourquoi sa pente vaut 2.



À TOI DE JOUER Même point de départ

Calcule le taux du carré entre 1 et 0,9.

Réponse pour te vérifier : $(0,81 - 1)/(0,9 - 1) = (-0,19)/(-0,1) = 1,9$. Les deux différences sont négatives ; le quotient est positif.

I • COMPRENDRE

Du taux au nombre dérivé

Rapprocher le deuxième point sans le confondre avec le premier.

Écrivons $b = a + h$. L'incrément h est le déplacement horizontal, positif ou négatif. Pour $h \neq 0$ et lorsque les images sont définies :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



DÉFINITION Nombre dérivé

Si ce taux se rapproche d'un même nombre réel fini lorsque h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en a** . Ce nombre est noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Il représente la pente de la tangente à la courbe au point $A(a; f(a))$.

La notation $\lim_{h \rightarrow 0}$ se lit « limite quand h tend vers zéro ». Ici, on l'utilise de manière intuitive : on cherche la valeur vers laquelle se stabilise le taux. **On ne remplace jamais h par 0 dans une division par h .**



SAVOIR-FAIRE Deux phases à distinguer

Pour $f(x) = x^2$ en $a = 1$:

$$\tau(h) = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \quad (h \neq 0).$$

D'abord, on développe et on simplifie pour $h \neq 0$. Ensuite, lorsque h tend vers 0, $2 + h$ tend vers 2. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

h	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
$\tau(h)$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1



Vérifier. Les valeurs se rapprochent de 2 des deux côtés. Le tableau suggère le résultat ; l'expression $2 + h$ l'explique exactement.



À TOI DE JOUER Ne pas confondre

Ici, que valent l'abscisse du contact, l'image et le nombre dérivé ?

Réponse pour te vérifier : $a = 1$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. Ce sont trois informations différentes.

I • SAVOIR-FAIRE 2

Calculer un taux sans sauter d'étape

Développer, soustraire, factoriser, puis passer à la limite.

Un polynôme en un point

Soit $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Pour montrer que f est dérivable en 2, commençons par ses images :

$$\begin{aligned} f(2) &= 8 - 2 + 3 = 9, \\ f(2+h) &= 2(2+h)^2 - (2+h) + 3 \\ &= 8 + 8h + 2h^2 - 2 - h + 3 = 9 + 7h + 2h^2. \end{aligned}$$

Pour $h \neq 0$, on en déduit

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{9 + 7h + 2h^2 - 9}{h} = \frac{h(7 + 2h)}{h} = 7 + 2h.$$

Lorsque h tend vers 0, le taux tend vers 7. Ainsi $f'(2) = 7$.

Démontrer la dérivée du carré en tout point

Pour $q(x) = x^2$ et un réel a , on obtient pour $h \neq 0$:

$$\frac{q(a+h) - q(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h.$$

Sa limite est $2a$. La fonction carré est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $q'(a) = 2a$ pour tout réel a .



POINT DE VIGILANCE Simplifier un facteur, pas un morceau de somme

Dans $(7h + 2h^2)/h$, le h se simplifie parce qu'on écrit $h(7 + 2h)/h$. On ne peut pas supprimer arbitrairement un h qui n'est pas un facteur de tout le numérateur.



À TOI DE JOUER À ton tour

Pour $g(x) = x^2 + 4x$, calcule le taux en $a = -1$, puis $g'(-1)$.

Réponse pour te vérifier : $g(-1) = -3$; $g(-1+h) = -3 + 2h + h^2$. Le taux vaut $2 + h$ et $g'(-1) = 2$.

I • SAVOIR-FAIRE 3

Traiter une fraction

Le dénominateur commun vient avant la division par h .

Pour $f(x) = 1/x$, fixons $a \neq 0$. On impose aussi $h \neq 0$ et $a + h \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\ &= -\frac{1}{a(a+h)}. \end{aligned}$$

Le numérateur $a - (a + h)$ vaut $-h$: la parenthèse après le signe moins est essentielle. Diviser par h , c'est multiplier par $1/h$. Lorsque h tend vers 0, le dénominateur tend vers $a^2 \neq 0$. Donc

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$



PROPRIÉTÉ Fonction inverse

La fonction $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Sa dérivée est $x \mapsto -1/x^2$.

Pourquoi préciser les intervalles?

Le nombre 0 n'appartient pas au domaine : on ne peut calculer ni $f(0)$ ni une tangente en 0. La dérivée est négative sur chacun des deux intervalles ; on ne franchit pas la coupure en 0 dans un tableau de variations.



À TOI DE JOUER Un multiple

Pour $g(x) = 4/x$, utilise le même taux afin d'obtenir $g'(2)$.

Réponse pour te vérifier : Le taux est $4 \times [-1/(2(2+h))] = -2/(2+h)$; sa limite vaut -1 .

I • SAVOIR-FAIRE 4

Construire une tangente

Connaître un point et une pente suffit à définir une droite.



PROPRIÉTÉ Équation de la tangente

Si f est dérivable en a , la tangente au point $A(a; f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pourquoi? Une droite de pente m passant par A vérifie $y - f(a) = m(x - a)$. Ici, $m = f'(a)$. On obtient la formule en ajoutant $f(a)$ des deux côtés. En remplaçant x par a , on retrouve bien $y = f(a)$.



SAVOIR-FAIRE Trois informations dans trois cases

Pour $f(x) = x^2 - 4x + 1$ au point d'abscisse 3 :

$$a = 3, \quad f(3) = 9 - 12 + 1 = -2, \quad f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2.$$

Ainsi $y = 2(x - 3) - 2$, soit $y = 2x - 8$. Le point de contact est $A(3; -2)$; 2 est la pente, pas l'ordonnée.



Vérifier. La droite passe par A car $2 \times 3 - 8 = -2$. Son coefficient directeur est bien 2. Les deux contrôles sont nécessaires.

Lire les données dans l'autre sens

Si la tangente en $a = 2$ a pour équation $y = -3x + 7$, alors $f'(2) = -3$ et $f(2) = -3 \times 2 + 7 = 1$. Sans l'abscisse de contact, l'équation de la droite seule ne donne pas une valeur précise de f .



POINT DE VIGILANCE Une tangente peut traverser la courbe

L'idée « elle touche sans jamais couper » n'est pas une définition valable. Pour $f(x) = x^3$, la tangente en 0 est l'axe horizontal; la courbe le traverse.



À TOI DE JOUER Tangente horizontale

Si $f(-2) = 5$ et $f'(-2) = 0$, donne l'équation de la tangente.

Réponse pour te vérifier : $y = 0(x + 2) + 5$, donc $y = 5$.

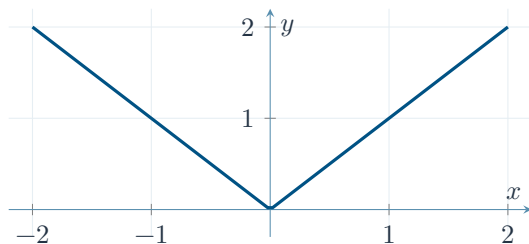
I • COMPRENDRE

Quand la dérivée n'existe pas

Être définie en un point ne suffit pas à être dérivable.

Un angle : la fonction valeur absolue

La fonction $f(x) = |x|$ vaut x pour $x \geq 0$ et $-x$ pour $x < 0$. En 0, le taux est $|h|/h$: il vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$. Les deux côtés ne donnent pas la même limite. Donc f n'est pas dérivable en 0.



Une pente qui devient infinie : la racine carrée

La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est définie en 0. Comme son domaine est $[0; +\infty[$, on approche 0 avec $h > 0$. Son taux vaut

$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Quand h se rapproche de 0 par valeurs positives, ce quotient grandit sans borne : il ne tend pas vers un réel fini. Donc g n'est pas dérivable en 0 ; sa courbe possède une demi-tangente verticale à l'origine.



POINT DE VIGILANCE Une formule a un domaine

La formule $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ne vaut que pour $x > 0$. Elle ne donne aucune valeur en 0.



À TOI DE JOUER Identifier l'obstacle

Pourquoi $|x|$ et $\sqrt{x}$ ne sont-elles pas dérivables en 0 ?

Réponse pour te vérifier : Pour $|x|$, deux limites différentes ; pour $\sqrt{x}$, aucun nombre réel fini comme limite du taux à droite.

I • SAVOIR-FAIRE 5

Dériver les fonctions usuelles

Passer d'une pente en un point à une fonction de x .



DÉFINITION Fonction dérivée

Lorsque f est dérivable en chaque point d'un intervalle I , sa **fonction dérivée** f' associe à chaque $x \in I$ le nombre dérivé $f'(x)$.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de la formule
k , constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \geq 1$ entier	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n, n < 0$ entier	nx^{n-1}	$x \neq 0$
$1/x$	$-1/x^2$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$x > 0$

Les formules du carré et de l'inverse ont été démontrées. Les autres formules du tableau sont admises ici. Pour $n = 0$, on considère la fonction constante égale à 1, de dérivée nulle.



PROPRIÉTÉ Somme et multiple

Pour u, v dérivables et k constant : $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$. On dérive donc un polynôme terme à terme.



SAVOIR-FAIRE Garder les coefficients

Pour $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$:

$$f'(x) = 3 \times 4x^3 - 2 \times 2x + 5 \times 1 - 0 = 12x^3 - 4x + 5.$$

La constante -7 disparaît parce qu'elle ne varie pas.



À TOI DE JOUER Puissance négative

Dérive $g(x) = 2x^{-3}$ pour $x \neq 0$.

Réponse pour te vérifier : $g'(x) = 2(-3)x^{-4} = -6/x^4$.

I • SAVOIR-FAIRE 6

Dériver un produit

Les deux facteurs peuvent varier en même temps.



PROPRIÉTÉ Règle du produit

Si u et v sont dérivables sur un intervalle, alors uv l'est aussi et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

D'où viennent les deux termes?

Pour $h \neq 0$, on ajoute puis on retranche $u(a)v(a+h)$ au numérateur :

$$\begin{aligned} & \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, les deux taux tendent vers $u'(a)$ et $v'(a)$. De plus $v(a+h) \rightarrow v(a)$, propriété des fonctions dérivables admise ici. On obtient $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.



SAVOIR-FAIRE Nommer les facteurs avant de calculer

Pour $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$: $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $v = 3x - 2$, $v' = 3$. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1) \\ &= 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3. \end{aligned}$$



Véifier. En développant d'abord $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, on retrouve la même dérivée. C'est ici une deuxième méthode et un contrôle.



POINT DE VIGILANCE La dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées

Pour $x \times x = x^2$, la dérivée vaut $2x$ et non $1 \times 1 = 1$.



À TOI DE JOUER Un produit court

Dérive $(x+2)(x-3)$ de deux façons.

Réponse pour te vérifier : $(x-3) + (x+2) = 2x-1$; ou développer $x^2 - x - 6$ puis dériver.

I • SAVOIR-FAIRE 7

Dériver un quotient

Vérifier le dénominateur, puis garder les parenthèses.



PROPRIÉTÉ Inverse et quotient

Si u et v sont dérivables et v ne s'annule pas, alors

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ces règles sont admises. Le quotient est étudié sur chaque intervalle où le dénominateur est non nul.



SAVOIR-FAIRE Un quotient de deux fonctions affines

Soit $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$, définie pour $x \neq 3$. Avec $u = 2x + 1$, $v = x - 3$, $u' = 2$ et $v' = 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x - 3) - (2x + 1)}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x - 3)^2} = \frac{-7}{(x - 3)^2}. \end{aligned}$$

Comme $(x - 3)^2 > 0$ pour $x \neq 3$, cette dérivée est négative partout où elle est définie.

Choisir parfois une écriture plus simple

Pour $g(x) = (x^2 + 4)/x$, on peut écrire $g(x) = x + 4/x$ si $x \neq 0$. D'où $g'(x) = 1 - 4/x^2$. La règle du quotient donnerait $(x^2 - 4)/x^2$, expression égale à la précédente.



POINT DE VIGILANCE Le signe moins porte sur tout uv'

Écrire $2(x - 3) - 2x + 1$ serait faux : il faut soustraire $2x + 1$, donc écrire $2x - 6 - 2x - 1$.



À TOI DE JOUER Vérifier le signe

Dérive $h(x) = 1/(x^2 + 2)$ sur $\mathbb{R}$.

Réponse pour te vérifier : $h'(x) = -2x/(x^2 + 2)^2$. Le dénominateur $x^2 + 2$ ne s'annule jamais.

I • SAVOIR-FAIRE 8

Passer du signe aux variations

Le signe de f' commande les flèches de f .



PROPRIÉTÉ Lien entre dérivée et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I . Si $f' \geq 0$ sur I , alors f y est croissante; si $f' \leq 0$, elle y est décroissante. Si $f' = 0$ partout sur I , elle y est constante. Ces résultats sont admis.

Si $f' > 0$ à l'intérieur de I , la croissance est stricte; si $f' < 0$, la décroissance est stricte. Des annulations isolées de f' peuvent aussi être compatibles avec une variation stricte.



SAVOIR-FAIRE Une parabole retrouvée par la dérivation

Pour $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $[0; 6]$, $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$. Le coefficient 2 est positif : la dérivée est négative avant 3, nulle en 3, positive après 3.

$$f(0) = 5, \quad f(3) = 9 - 18 + 5 = -4, \quad f(6) = 5.$$

x	0	3	6
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	5	—4	5

La fonction **décroît** de 5 à -4 , puis **croît** de -4 à 5. Elle admet un minimum égal à -4 , atteint pour $x = 3$.



POINT DE VIGILANCE Deux signes, deux questions

Sur $[0; 1]$, cette fonction est positive mais décroissante : sa courbe est au-dessus de l'axe tout en descendant. Le signe de f décrit sa position; celui de f' décrit son évolution.



À TOI DE JOUER Justifier une flèche

Si $g'(x) = 5 - 2x$ sur $[0; 4]$, où g croît-elle?

Réponse pour te vérifier : Pour $5 - 2x \geq 0$, soit $x \leq 2,5$. Elle croît sur $[0; 2,5]$, puis décroît sur $[2,5; 4]$.

I • SAVOIR-FAIRE 9

Construire un tableau complet

Dériver, factoriser, étudier le signe, calculer les images.

Étudions $f(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $[-2; 2]$.

1 • Dériver. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

2 • Ordonner les racines. Les racines de f' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Le coefficient dominant 3 est positif : le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

x	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

3 • Calculer les images. $f(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$, $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$, $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, $f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$.

x	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	4	0	4	

4 • Interpréter. Sur cet intervalle, le minimum est 0, atteint en -2 et en 1 ; le maximum est 4, atteint en -1 et en 2 . Un extremum peut être atteint à plusieurs endroits.

La forme factorisée sert au signe

La forme développée $3x^2 - 3$ est facile à obtenir. La forme $3(x - 1)(x + 1)$ rend les racines visibles. Le calcul n'est terminé que lorsque la forme choisie permet de répondre à la question.

À TOI DE JOUER Quel tableau?

Pour étudier les variations de f , faut-il chercher les racines de f ou de f' ?

Réponse pour te vérifier : Celles de f' , car on cherche où la dérivée peut changer de signe. Les racines de f répondent à la question $f(x) = 0$.

I • COMPRENDRE

Extremum : examiner le contexte

Une dérivée nulle donne un candidat, pas une conclusion.



DÉFINITION Minimum et maximum

Sur un intervalle I , f admet un minimum en $a \in I$ si $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$. Pour un maximum, on inverse l'inégalité. Un extremum **local** ne compare que les points suffisamment proches de a .



PROPRIÉTÉ Une condition nécessaire à l'intérieur

Si f est dérivable en a , si a est à l'intérieur de l'intervalle étudié et si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Trois situations à distinguer

1. $f(x) = x^2 : f'(0) = 0$, et la dérivée passe de négative à positive. Il y a un minimum en 0.
2. $g(x) = x^3 : g'(0) = 0$, mais $g'(x) = 3x^2$ reste positive de part et d'autre. La fonction continue de croître : aucun extremum en 0.
3. $h(x) = x$ sur $[0; 2]$: son maximum est atteint au bord $x = 2$, alors que $h'(2) = 1$. L'hypothèse « à l'intérieur » est indispensable.



SAVOIR-FAIRE Chercher un maximum sur un intervalle fermé

Étudie les variations et compare les valeurs aux points critiques *et aux deux bornes*. Résoudre $f'(x) = 0$ sans examiner l'intervalle peut faire oublier le vrai maximum.



Le déclic. À un sommet lisse intérieur, la tangente est horizontale. Mais une horizontale peut aussi correspondre à un aplatissement sans retournement. Le changement de signe tranche.



À TOI DE JOUER Un bord

Quel est le minimum de $f(x) = x^2$ sur $[2; 5]$? Sa dérivée y est-elle nulle?

Réponse pour te vérifier : Minimum 4 en 2. La dérivée vaut 4 en 2; ce point est une borne de l'intervalle.

I • SAVOIR-FAIRE 10

Comparer deux courbes

Transformer une position graphique en étude d'un signe.



SAVOIR-FAIRE Courbe et tangente à la fonction carré

Pour $f(x) = x^2$, la tangente au point d'abscisse a est $T(x) = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$. Calculons l'écart :

$$f(x) - T(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 \geq 0.$$

La courbe du carré est donc au-dessus de chacune de ses tangentes; l'égalité a lieu seulement pour $x = a$.

Une inégalité issue d'un minimum

Pour $x > 0$, posons $g(x) = x + 1/x$. Alors $g'(x) = 1 - 1/x^2 = (x - 1)(x + 1)/x^2$. Puisque $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$, le signe est celui de $x - 1$. Ainsi g décroît jusqu'à 1, puis croît : son minimum vaut $g(1) = 2$. On a démontré

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Exploiter une symétrie

Sur un domaine symétrique par rapport à 0, f est **paire** si $f(-x) = f(x)$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$: symétrie centrale par rapport à l'origine. Pour $x^2 + 1$, $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$: parité. Pour $x^3 - x$, $(-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x)$: imparité. Une symétrie peut réduire les tracés, mais se vérifie algébriquement.



À TOI DE JOUER Un écart simple

Compare $x^2 + 2$ et $2x + 1$ pour tout réel x .

Réponse pour te vérifier : Leur différence est $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$. La première courbe est au-dessus, avec égalité en 1.

I • SAVOIR-FAIRE 11

Optimiser une quantité

Définir la variable et son domaine avant de dériver.

Un atelier vend q objets par semaine, avec q entier entre 0 et 80. Son coût est modélisé par $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$ euros; le prix de vente est 50 euros par objet. Pour le calcul, on prolonge le modèle aux réels de $[0; 80]$.

Les formules donnent ici des valeurs numériques en euros lorsque q est le nombre d'objets. Une dérivée par rapport à q s'interprète en euros par objet.



SAVOIR-FAIRE Coût, recette, bénéfice

1 • Construire la grandeur à optimiser. La recette est $R(q) = 50q$. Le bénéfice est la recette moins le coût :

$$B(q) = R(q) - C(q) = -0,5q^2 + 40q - 200.$$

C , R et B sont en euros; q est un nombre d'objets.

2 • Étudier le modèle continu. $B'(q) = -q + 40$. La dérivée est positive avant 40, nulle en 40, négative après. Le bénéfice augmente jusqu'à 40, puis diminue.

3 • Revenir au problème. $B(40) = -800 + 1600 - 200 = 600$ euros. Comme 40 est un entier admissible, le bénéfice maximal est 600 euros pour 40 objets vendus.



POINT DE VIGILANCE Les contraintes peuvent changer la réponse

Si la capacité était limitée à 30 objets, le bénéfice serait croissant sur tout $[0; 30]$: il faudrait vendre 30 objets. Si le sommet était en 40,4, on comparerait les deux entiers voisins admissibles 40 et 41.

Relier dérivée et contexte

$C'(q)$ exprime un coût par objet dans le modèle continu; il peut approximer le coût supplémentaire d'un objet. Ce n'est pas exactement $C(q+1) - C(q)$ en général. Les unités aident à distinguer coût total et coût marginal.



À TOI DE JOUER Retour aux unités

Si $B'(20) = 20$, cela signifie-t-il un bénéfice total de 20 euros?

Réponse pour te vérifier : Non. Cela décrit la variation du bénéfice par objet supplémentaire au voisinage de 20 objets, dans le modèle continu.

I • SAVOIR-FAIRE 12

Approcher et programmer

Une tangente donne un modèle local, pas une égalité globale.



PROPRIÉTÉ Approximation linéaire

Pour h assez petit et f dérivable en a :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

On remplace localement la courbe par sa tangente. La précision dépend de h et de la fonction.



SAVOIR-FAIRE Approcher une racine carrée

Pour $f(x) = \sqrt{x}$, au point $a = 9$: $f(9) = 3$ et $f'(9) = 1/(2 \times 3) = 1/6$. Pour approcher $\sqrt{9,12}$, on prend $h = 0,12$:

$$\sqrt{9,12} \approx 3 + \frac{1}{6} \times 0,12 = 3,02.$$

Contrôle : $3,02^2 = 9,1204$, très proche de 9,12. L'approximation est légèrement trop grande.

Calculer une liste de pentes de sécantes

```
def f(x):
    return x*x + 2*x

a = 1
pas = [0.1, 0.01, 0.001, -0.001]
pentes = [(f(a+h)-f(a))/h for h in pas]
print(pentes)
```

Mathématiquement, le taux vaut $4 + h$: on attend 4,1, 4,01, 4,001 et 3,999, à l'arrondi informatique près. La liste suggère $f'(1) = 4$; le taux simplifié le démontre.



POINT DE VIGILANCE Très petit n'est pas toujours plus précis en machine

Soustraire deux nombres presque égaux peut amplifier les effets d'arrondi. Une machine ne remplace pas la simplification algébrique.



À TOI DE JOUER Lire le code

Pourquoi 0 ne doit-il pas figurer dans la liste des pas ?

Réponse pour te vérifier : Chaque quotient divise par h : $h = 0$ entraînerait une division par zéro.

II • EXERCICES

Installer les bases

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

1 Images, différences et taux

Bases

Soit $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Calcule $f(1)$ et $f(3)$, puis le taux de variation entre 1 et 3. Explique la différence entre les trois nombres obtenus.

[Correction 1](#)**2 Préparer un taux**

Bases

Pour $g(x) = 3x^2 - 2x + 4$, développe $g(1 + h)$, calcule $g(1)$ puis simplifie $[g(1 + h) - g(1)]/h$ pour $h \neq 0$. Déduis-en $g'(1)$.

[Correction 2](#)**3 Un taux avec des fractions**

Bases

Soit $f(x) = 6/x$ sur $]0; +\infty[$. Calcule le taux en $a = 3$, puis montre que $f'(3) = -2/3$. Indique les conditions sur h .

[Correction 3](#)**4 Quatre affirmations à corriger**

Raisonner

Vrai ou faux? Justifie. 1. $f'(2) = 5$ implique $f(2) = 5$. 2. Une tangente horizontale a une pente nulle. 3. Le taux se calcule en prenant $h = 0$. 4. Une courbe située sous l'axe horizontal est forcément décroissante.

[Correction 4](#)

II • EXERCICES

Entraînement · 5 à 8

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

5 Lire une tangente par deux points

Graphique

La tangente à une courbe au point $A(2; 3)$ passe aussi par $B(5; -3)$. Détermine $f(2)$, $f'(2)$ et une équation de cette tangente. Le point B appartient-il nécessairement à la courbe?

[Correction 5](#)

6 Écrire puis vérifier une tangente

Application

Pour $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, calcule $f'(x)$ puis l'équation de la tangente en $a = 2$. Vérifie son passage par le point de contact.

[Correction 6](#)

7 Lire une équation de tangente

Inverse

La tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 4x + 6$. Donne $g'(-1)$, $g(-1)$ et les coordonnées du contact. Que peut-on dire de $g(0)$?

[Correction 7](#)

8 Une pointe et une verticale

Raisonner

Étudie la dérivabilité en 0 de $f(x) = |x|$, puis celle de $g(x) = \sqrt{x}$, en utilisant leurs taux. Dans quel cas y a-t-il une demi-tangente verticale?

[Correction 8](#)

II • EXERCICES

Entraînement · 9 à 12

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

9 Dérivées usuelles

Automatismes

Dérive en précisant le domaine : $f(x) = 4x^3 - 7x + 2$; $g(x) = 5/x$; $h(x) = 3\sqrt{x}$; $k(x) = 2x^{-2} - 1$.

[Correction 9](#)**10 Corriger trois calculs**

Diagnostic

Un élève écrit : $(x^2 + 3)' = 2x + 3$; $[(x + 1)(x - 2)]' = 1$; $[1/(x + 2)]' = 1/(x + 2)^2$. Corrige et explique chaque erreur.

[Correction 10](#)**11 Produit ou développement ?**

Choisir

Dérive $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$ de deux façons. Compare les résultats et explique quand un développement préalable est avantageux.

[Correction 11](#)**12 Quotient et domaine**

Application

Soit $f(x) = (3x - 2)/(x + 4)$. Précise son domaine, calcule sa dérivée et détermine son signe. Ne dresse pas un intervalle de variation qui traverse -4 .

[Correction 12](#)

II • EXERCICES

Entraînement · 13 à 16

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

13 Simplifier d'abord

Choisir

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = (x^2 + 9)/x$. Dérive en simplifiant d'abord l'expression. Étudie les variations et donne le minimum.

[Correction 13](#)**14** Un produit avec une racine

Application

Pour $x > 0$, dérive $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$ et réduis la dérivée à une seule fraction. Dédus-en le sens de variation.

[Correction 14](#)**15** Étudier une parabole autrement

Variations

Étudie $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$ sur $[0; 5]$. Construis son tableau de variations et donne son minimum et son maximum sur cet intervalle.

[Correction 15](#)**16** Dérivée du second degré

Variations

Pour $f(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $[-2; 2]$, calcule et factorise $f'(x)$. Dresse le tableau complet, puis trouve tous les points où le minimum est atteint.

[Correction 16](#)

II • EXERCICES

Entraînement · 17 à 18

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

17 Une horizontale sans extremum

Raisonner

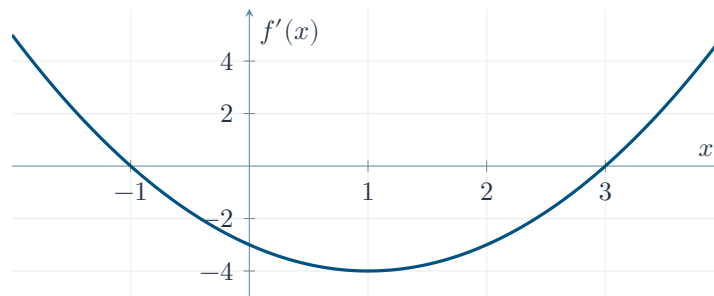
Montre que la tangente à $f(x) = x^3 + 2$ en 0 est horizontale. Explique pourquoi ce point n'est ni un minimum ni un maximum.

Correction 17

18 On te donne la courbe de f'

Graphique

Le graphique représente la **dérivée** d'une fonction f sur $[-2; 4]$. Déduis les variations de f et les abscisses de ses extrema locaux intérieurs. Peut-on lire leurs valeurs?



Correction 18

II • EXERCICES

Entraînement · 19 à 22

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

19 Tangentes parallèles[Approfondir](#)

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Cherche les tangentes parallèles à la droite $y = 9x - 4$. Donne leurs points de contact et leurs équations.

[Correction 19](#)**20** Retrouver un polynôme[Inverse](#)

On cherche $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sa courbe passe par $(0; 2)$ et sa tangente en $x = 1$ a pour équation $y = 4x - 1$. Détermine a, b, c , puis vérifie les données.

[Correction 20](#)**21** Une courbe au-dessus de sa tangente[Démontrer](#)

Pour $f(x) = x^2 + 2x + 3$, détermine la tangente en $a = 1$, puis étudie la position de la courbe par rapport à cette tangente sur $\mathbb{R}$.

[Correction 21](#)**22** Prouver une inégalité[Démontrer](#)

Étudie $g(x) = x + 4/x$ pour $x > 0$ et déduis-en que $x + 4/x \geq 4$. Précise le cas d'égalité.

[Correction 22](#)

II • EXERCICES

Entraînement · 23 à 24

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

23 Symétries utiles

Raisonner

Étudie la parité de $f(x) = x^4 - 2x^2$ et de $g(x) = x^3 + x$. Déduis les symétries de leurs courbes. Calcule leurs dérivées et observe la parité de celles-ci.

[Correction 23](#)**24** Une approximation contrôlée

Application

Utilise la tangente à la racine carrée en $a = 16$ pour approcher $\sqrt{16,24}$. Contrôle le résultat en le mettant au carré. Est-ce une égalité exacte?

[Correction 24](#)

II • EXERCICES

Entraînement · 25 à 26

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

25 Vitesse d'un chariot

Modéliser

Sur un rail orienté, la position d'un chariot est $s(t) = t^2 + 2t$ pour $0 \leq t \leq 5$. La formule donne s en mètres lorsque t est en secondes.

1. Calcule sa vitesse moyenne entre 1 et 3 secondes.
2. Calcule sa vitesse instantanée à $t = 2$ s.
3. Compare les deux résultats et explique pourquoi ils ne représentent pas la même information.

[Correction 25](#)**26** Un enclos contre un mur

Optimiser

Un atelier pédagogique dispose de 40 m de clôture pour trois côtés d'un rectangle adossé à un mur. On note x la profondeur perpendiculaire au mur et L la longueur parallèle au mur. Les dimensions sont strictement positives.

1. Dessine la situation et exprime L en fonction de x .
2. Détermine le domaine admissible et l'aire $A(x)$.
3. Trouve les dimensions donnant l'aire maximale et justifie le résultat.

[Correction 26](#)

II • EXERCICES

Entraînement · 27 à 28

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

27 Vendre des objets, gagner de l'argent

Synthèse

Une association fabrique de petits supports de téléphone. Pour q objets vendus, son coût est $C(q) = q^2/4 + 6q + 90$ euros. Chaque objet est vendu 20 euros. On suppose que tout objet fabriqué est vendu et que q est un entier de 0 à 60.

1. Exprime la recette $R(q)$ et le bénéfice $B(q)$.
2. Étudie le bénéfice sur l'intervalle réel $[0; 60]$.
3. Donne la quantité entière optimale et le bénéfice maximal.
4. Si la capacité est limitée à 20 objets, quel est le meilleur choix?

Correction 27

28 Un optimum entre deux entiers

Décider

Le gain hebdomadaire d'une petite production est modélisé par $B(q) = -2q^2 + 53q - 200$ euros, pour un nombre entier q d'objets entre 0 et 30.

1. Trouve le maximum du modèle continu.
2. Détermine le meilleur nombre entier d'objets.
3. Explique pourquoi arrondir sans comparaison n'est pas une méthode générale.

Correction 28

II • EXERCICES

Entraînement · 29 à 30

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

29 Une boîte ouverte

Prise d'initiative

Dans une feuille carrée de côté 18 cm, on découpe quatre carrés identiques de côté x aux coins, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprime le volume et son domaine admissible.
2. Montre que sa dérivée se factorise sous la forme $12(x - 3)(x - 9)$.
3. Détermine les dimensions de la boîte de volume maximal.

Correction 29

30 Une liste de pentes

Python

Pour $f(x) = x^2 - x$, on étudie la dérivée en $a = 2$ avec le code :

```
a = 2
pas = [0.1, 0.01, -0.01]
pentes = [(f(a+h)-f(a))/h for h in pas]
```

1. Écris la fonction Python f .
2. Calcule exactement les trois valeurs attendues.
3. Démontre ou réfute la conjecture sur $f'(2)$ en simplifiant le taux.

Correction 30

II • EXERCICES

Entraînement · 31 à 32

Écris les étapes utiles et justifie les conditions de chaque formule.

31 Retrouver une racine avec les tangentes

Approfondissement guidé

Pour approcher $\sqrt{2}$, on utilise $f(x) = x^2 - 2$ et une valeur initiale $u_0 = 1,5$. La tangente en $u_n > 0$ coupe l'axe horizontal à l'abscisse u_{n+1} .

1. À partir de l'équation de la tangente, montre que $u_{n+1} = u_n - f(u_n)/f'(u_n) = (u_n + 2/u_n)/2$.
2. Calcule u_1 puis u_2 .
3. Écris une boucle de trois étapes et précise ce qu'elle permet de conjecturer, sans prétendre prouver la convergence.

Correction 31

32 Auditer une étude complète

Bilan

Une élève étudie $f(x) = (x^2 + 1)/(x + 1)$ sur $[0; 3]$ et affirme : « $f'(x) = 2x$, donc la fonction croît et son minimum vaut 1. »

1. Identifie l'erreur de règle.
2. Calcule la bonne dérivée et sa racine admissible.
3. Dresse les variations et détermine le minimum exact.
4. Calcule la tangente en 0 puis compare la courbe à cette droite sur $[0; 3]$.

Correction 32

II • PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

Quatre parcours de contrôle

Modéliser, choisir les outils, calculer puis interpréter.

33 Concevoir une rampe progressive

Synthèse • 8 questions

Le profil d'une rampe est modélisé, pour $x \in [0; 4]$, par

$$h(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2,$$

où x et $h(x)$ sont exprimés en mètres.

1. Calcule $h(0)$ et $h(4)$, puis interprète ces valeurs.
2. Calcule et factorise $h'(x)$.
3. Étudie le signe de h' sur $[0; 4]$ et dresse le tableau de variations de h .
4. Détermine les tangentes au profil aux deux extrémités. Que signifie leur pente?
5. Calcule la pente moyenne entre le départ et l'arrivée.
6. Écris $h'(x)$ sous la forme $1,2 - 0,3(x - 2)^2$ et déduis la pente maximale.
7. Une pente instantanée strictement supérieure à 1 est jugée trop forte. Résous $h'(x) > 1$ sur $[0; 4]$.
8. Indique la portion de la rampe à modifier et explique pourquoi le seul dessin ne suffisait pas.

Correction 33

34 Un panneau sous une arche

Synthèse • 9 questions

Une arche est modélisée dans un repère orthonormé par la courbe

$$f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}, \quad -4 \leq x \leq 4.$$

Un panneau rectangulaire est centré sur l'axe vertical. Ses sommets supérieurs appartiennent à l'arche. On note $x > 0$ la demi-largeur du panneau.

1. Fais un croquis et justifie que $0 < x < 4$.
2. Exprime la largeur puis la hauteur du panneau en fonction de x .
3. Montre que son aire est $A(x) = 8x - \frac{x^3}{2}$.
4. Calcule $A'(x)$ puis résous $A'(x) = 0$ sur $]0; 4[$.
5. Étudie le signe de A' et justifie l'existence d'un maximum.
6. Donne les dimensions exactes du panneau d'aire maximale.
7. Calcule son aire exacte puis une valeur approchée au centième.
8. Si x doit être choisi au dixième de mètre, compare $x = 2,3$ et $x = 2,4$.
9. Explique pourquoi arrondir directement $4/\sqrt{3}$ sans comparer pouvait être risqué.

Correction 34

35 Analyser le déplacement d'une navette

Synthèse • 9 questions

Sur une voie rectiligne orientée, la position d'une navette est

$$s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 3t, \quad 0 \leq t \leq 4,$$

avec t en secondes et $s(t)$ en mètres.

1. Calcule les positions aux instants 0 et 4.
2. Calcule la vitesse moyenne sur les quatre premières secondes, avec son unité.
3. La vitesse instantanée est $v(t) = s'(t)$. Détermine $v(t)$.
4. Montre que $v(t) = 7 - (t - 2)^2$ et déduis sa valeur maximale.
5. Justifie que la navette avance dans le sens positif pendant toute l'étude.
6. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de s au point d'abscisse 1.
7. Calcule la vitesse moyenne entre 1 et 3 secondes, puis compare-la à $v(2)$.
8. La consigne impose $v(t) \leq 6,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Détermine les instants où elle est dépassée.
9. Rédige une conclusion destinée au responsable de l'essai.

Correction 35

36 Auditer une étude de quotient

Bilan · 10 questions

On étudie sur $[0; 5]$ la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x + 1}.$$

Un élève affirme : « le dénominateur est positif, donc f est croissante ».

1. Explique pourquoi l'argument donné ne traite pas les variations.
2. Justifie que f est définie et dérivable sur $[0; 5]$.
3. Calcule $f'(x)$ et réduis son numérateur.
4. Résous $x^2 + 2x - 4 = 0$ et conserve la racine appartenant à $[0; 5]$.
5. Dresse le tableau de variations complet de f .
6. Détermine le minimum exact, puis une valeur approchée au millième.
7. Calcule l'équation de la tangente en 0.
8. Montre que l'écart entre la courbe et cette tangente vaut $\frac{5x^2}{x + 1}$.
9. Déduis la position relative sur $[0; 5]$.
10. Utilise la tangente pour approcher $f(0,02)$, puis contrôle avec la valeur calculée.

Correction 36

IV • ÉVALUATIONS

Se préparer au contrôle

Cherche sans la correction, puis analyse précisément les points perdus.

E1 Contrôle ciblé — nombre dérivé et tangente

25 min • 10 points

On considère $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Calcule $g(1)$ et développe $g(1 + h)$. 2 pts
2. Simplifie $\frac{g(1 + h) - g(1)}{h}$ pour $h \neq 0$, puis déduis $g'(1)$. 2 pts
3. Retrouve $g'(x)$ à l'aide des formules usuelles. 1 pt
4. Détermine l'équation de la tangente en 1 et vérifie le point de contact. 2 pts
5. Utilise cette tangente pour approcher $g(1,03)$, puis compare à la valeur exacte. 2 pts
6. Explique en une phrase la différence entre taux moyen et nombre dérivé. 1 pt

[Correction E1](#)

E2 Contrôle de synthèse — production et bénéfice

50 min · 20 points

Une micro-entreprise vend q lots par semaine, avec q entier et $0 \leq q \leq 40$. Le prix d'un lot, en euros, est $p(q) = 60 - q$. Le coût total est $C(q) = q^2 + 12q + 80$ euros.

1. Explique pourquoi la recette est $R(q) = q(60 - q)$. 2 pts
2. Montre que le bénéfice vaut $B(q) = -2q^2 + 48q - 80$. 2 pts
3. Étudie les variations du modèle continu sur $[0; 40]$. 4 pts
4. Détermine le nombre entier de lots donnant le bénéfice maximal et calcule ce bénéfice. 3 pts
5. Résous exactement $B(q) = 0$, puis donne les valeurs entières de q pour lesquelles l'activité est bénéficiaire. 4 pts
6. La capacité est ramenée à 9 lots. Quel choix maximise alors le bénéfice? Justifie sans refaire toute l'étude. 2 pts
7. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de B en $q = 10$ et interprète sa pente. 2 pts
8. Donne deux contrôles permettant de repérer une réponse incohérente. 1 pt

Correction E2

III • CORRECTIONS

Des méthodes expliquées

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.



SAVOIR-FAIRE Le fil à reproduire au contrôle

Commence par le domaine, puis nomme la règle de dérivation avant de calculer. Simplifie la dérivée pour en lire le signe, place les zéros et les valeurs interdites, et seulement ensuite trace les flèches de variation. Une étude complète se termine par les images utiles et une phrase répondant exactement à la question.

1 Images, différences et taux

Énoncé

Les images sont $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$ et $f(3) = 9 + 6 - 1 = 14$. La variation verticale est $14 - 2 = 12$; la variation horizontale est $3 - 1 = 2$. Le taux vaut donc $12/2 = 6$. Les nombres 2 et 14 sont des ordonnées de la courbe. Le nombre 6 est la pente de la droite qui relie les deux points. Il ne représente pas l'image de 6, ni nécessairement la pente de la tangente en 1.



Vérifier. Inverser l'ordre dans les deux différences donne $(2 - 14)/(1 - 3) = (-12)/(-2) = 6$.

2 Préparer un taux

Énoncé

On calcule séparément pour ne pas perdre les constantes :

$$g(1+h) = 3(1+2h+h^2) - 2 - 2h + 4 = 5 + 4h + 3h^2, \quad g(1) = 5.$$

Le taux est $[5 + 4h + 3h^2 - 5]/h = (4h + 3h^2)/h = 4 + 3h$ pour $h \neq 0$. Lorsque $h \rightarrow 0$, ce taux tend vers 4. Donc g est dérivable en 1 et $\boxed{g'(1) = 4}$. La simplification s'appuie sur $4h + 3h^2 = h(4 + 3h)$; elle ne consiste pas à remplacer h par zéro.

III • CORRECTIONS

Corrections • 3 et 4

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

3 Un taux avec des fractions

Énoncé

Il faut $h \neq 0$ pour le taux et $3 + h > 0$ pour rester dans le domaine. On a $f(3) = 2$. Pour mettre au même dénominateur :

$$\frac{6}{3+h} - 2 = \frac{6 - 2(3+h)}{3+h} = \frac{-2h}{3+h}.$$

Le taux vaut donc $[-2h/(3+h)]/h = -2/(3+h)$. Sa limite lorsque $h \rightarrow 0$ est $-2/3$.



Véifier. La fonction inverse multipliée par 6 est décroissante sur cet intervalle; une pente négative est cohérente.

4 Quatre affirmations à corriger

Énoncé

1. **Faux.** Pour $f(x) = 5x$, on a $f'(2) = 5$ mais $f(2) = 10$: la pente et l'image diffèrent.
2. **Vrai.** Une droite $y = b$ a un coefficient directeur nul.
3. **Faux.** Le taux contient une division par h . On calcule pour $h \neq 0$, puis on cherche la limite de l'expression simplifiée.
4. **Faux.** Sur $[-3; -1]$, $f(x) = x$ est négative et strictement croissante. « Sous l'axe » porte sur le signe de f ; « décroissante » porte sur les variations.

III • CORRECTIONS

Corrections · 5 et 6

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

5 Lire une tangente par deux points

Énoncé

Le contact $A(2; 3)$ donne $f(2) = 3$. La pente se lit avec les deux points de la *tangente* :

$$f'(2) = \frac{-3 - 3}{5 - 2} = -2.$$

L'équation est $y = -2(x - 2) + 3 = -2x + 7$. Pour $x = 2$ on retrouve 3, et pour $x = 5$ on retrouve -3 . Le point B appartient à la droite ; cela ne garantit pas qu'il soit sur la courbe. On ne peut donc pas conclure que $f(5) = -3$.

6 Écrire puis vérifier une tangente

Énoncé

La fonction est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 4x - 5$, donc $f'(2) = 3$. L'image vaut $f(2) = 8 - 10 + 1 = -1$.

$$y = 3(x - 2) - 1 = \boxed{3x - 7}.$$

Le point de contact est $(2; -1)$. Le point appartient bien à la droite car $3 \times 2 - 7 = -1$. La pente 3 confirme que la tangente monte lorsque x augmente.

III • CORRECTIONS

Corrections • 7 et 8

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

7 Lire une équation de tangente

Énoncé

Le coefficient directeur est 4, donc $g'(-1) = 4$. Pour trouver l'image, on remplace x par l'abscisse du contact dans la droite : $g(-1) = 4(-1) + 6 = 2$. Le contact est donc $(-1; 2)$. La tangente coupe l'axe vertical en $(0; 6)$, mais ce point n'est pas nécessairement sur la courbe. La valeur $g(0)$ n'est pas déterminée par les données. C'est l'abscisse du contact qui permet de relier une ordonnée de la droite à une image de la fonction.

8 Une pointe et une verticale

Énoncé

Pour la valeur absolue, $f(0) = 0$ et le taux vaut $|h|/h$. Pour $h > 0$, il vaut 1 ; pour $h < 0$, il vaut -1 . Il n'y a pas de limite commune, donc pas de nombre dérivé en 0.

Pour la racine carrée, on doit prendre $h > 0$. Le taux vaut $\sqrt{h}/h = 1/\sqrt{h}$. Il tend vers $+\infty$: il n'a pas de limite réelle finie. La fonction n'est pas dérivable en 0, et sa courbe possède une demi-tangente verticale. Dans les deux cas, la fonction est pourtant définie en 0.

III • CORRECTIONS

Corrections • 9 et 10

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

9 Dérivées usuelles

Énoncé

Pour f , chaque terme est un polynôme : $f'(x) = 12x^2 - 7$ sur $\mathbb{R}$.

Pour g , la formule de l'inverse donne $g'(x) = -5/x^2$ pour $x \neq 0$.

Pour h , on multiplie la dérivée de la racine par 3 : $h'(x) = 3/(2\sqrt{x})$ pour $x > 0$. Bien que $h(0)$ existe, la formule de dérivation ne s'y applique pas.

Pour k , la puissance négative donne $k'(x) = 2(-2)x^{-3} = -4/x^3$ pour $x \neq 0$. La constante -1 a une dérivée nulle.

10 Corriger trois calculs

Énoncé

La constante 3 a pour dérivée 0 : $(x^2 + 3)' = 2x$.

La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées. Elle vaut $1(x - 2) + (x + 1)1 = 2x - 1$. On peut aussi développer $x^2 - x - 2$.

Pour $v = x + 2$, on a $v' = 1$ et $(1/v)' = -v'/v^2$. Ainsi la dernière dérivée est $-1/(x + 2)^2$ pour $x \neq -2$. Le signe moins traduit ici la décroissance sur chaque intervalle de définition.

III • CORRECTIONS

Corrections · 11 et 12

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

11 Produit ou développement?

Énoncé

Par la règle du produit :

$$f'(x) = 2(x^2 + 3) + (2x - 1)2x = 2x^2 + 6 + 4x^2 - 2x = 6x^2 - 2x + 6.$$

Par développement, $f(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$, d'où $f'(x) = 6x^2 - 2x + 6$. Les deux résultats sont égaux. Pour un produit de petits polynômes, développer peut raccourcir le calcul. Pour une expression plus longue, ou pour conserver des facteurs utiles au signe, la règle du produit peut être préférable. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

12 Quotient et domaine

Énoncé

Le dénominateur impose $x \neq -4$. Sur chaque intervalle de définition, on pose $u = 3x - 2$, $u' = 3$, $v = x + 4$, $v' = 1$:

$$f'(x) = \frac{3(x + 4) - (3x - 2)}{(x + 4)^2} = \frac{3x + 12 - 3x + 2}{(x + 4)^2} = \frac{14}{(x + 4)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif pour $x \neq -4$; la dérivée est donc positive. La fonction est strictement croissante sur $] -\infty; -4[$ et sur $] -4; +\infty[$ séparément. Elle n'est pas définie en -4 .

III • CORRECTIONS

Corrections · 13 et 14

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

13 Simplifier d'abord

Énoncé

Sur $]0; +\infty[$, $f(x) = x + 9/x$. Donc

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

Puisque $x + 3 > 0$ et $x^2 > 0$, le signe de f' est celui de $x - 3$. La fonction décroît sur $]0; 3]$, puis croît sur $[3; +\infty[$. Son minimum vaut $f(3) = 3 + 9/3 = 6$, atteint seulement en 3.



Véifier. Pour $x = 1$, $f(1) = 10$; pour $x = 9$, $f(9) = 10$. Ces valeurs sont supérieures au minimum trouvé.

14 Un produit avec une racine

Énoncé

Les facteurs sont $u = x + 1$ et $v = \sqrt{x}$, dérivables pour $x > 0$. On a $u' = 1$ et $v' = 1/(2\sqrt{x})$. Ainsi

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 1}{2\sqrt{x}}.$$

Pour mettre au même dénominateur, on a utilisé $\sqrt{x} = 2x/(2\sqrt{x})$. Le numérateur et le dénominateur sont positifs : f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

III • CORRECTIONS

Corrections · 15 et 16

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

15 Étudier une parabole autrement

Énoncé

La dérivée est $f'(x) = -4x + 8 = -4(x - 2)$. Elle est positive pour $x < 2$, nulle en 2, négative pour $x > 2$. Les images utiles sont $f(0) = -3$, $f(2) = -8 + 16 - 3 = 5$ et $f(5) = -50 + 40 - 3 = -13$.

x	0	2	5
$f'(x)$		+	−
$f(x)$	−3	5	−13

Le maximum est 5 en 2. Le minimum sur $[0; 5]$ est -13 en 5 : il faut bien comparer les deux bornes, et pas seulement chercher la dérivée nulle.

16 Dérivée du second degré

Énoncé

On obtient $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Ses racines ordonnées sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Le signe est +, puis −, puis +. Les images sont $f(-2) = 0$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $f(2) = 4$.

x	−2	−1	1	2
$f'(x)$		+	−	+
$f(x)$	0	4	0	4

Le minimum 0 est atteint en -2 et en 1. Un même extremum peut être atteint au bord et à l'intérieur. Le maximum 4 est atteint en -1 et en 2.

III • CORRECTIONS

Corrections · 17 et 18

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

17 Une horizontale sans extremum

Énoncé

On a $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$ et $f(0) = 2$. La tangente est $y = 2$. Pour $x < 0$, $x^3 + 2 < 2$; pour $x > 0$, $x^3 + 2 > 2$. Même très près de 0, il y a donc des valeurs plus petites et plus grandes que 2 : aucun extremum. La dérivée reste positive des deux côtés de zéro, sans changement de signe. La fonction est strictement croissante : elle s'aplatit au contact sans changer de sens de variation.

18 On te donne la courbe de f'

Énoncé

La courbe donnée est celle de f' . Elle coupe l'axe horizontal en -1 et 3 . Elle est au-dessus de l'axe pour $x < -1$ et $x > 3$, et en dessous entre ces deux valeurs. Ainsi f croît sur $[-2; -1]$, décroît sur $[-1; 3]$, puis croît sur $[3; 4]$. Elle admet un maximum local en -1 et un minimum local en 3 . Le dessin ne donne pas $f(-1)$ ni $f(3)$. Ajouter une constante à f change toutes ses images sans modifier sa dérivée. On ne peut donc pas donner les valeurs des extrema à partir de ce seul graphique.

III • CORRECTIONS

Corrections · 19 et 20

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

19 Tangentes parallèles

Énoncé

Le parallélisme demande une pente égale à 9. Comme $f'(x) = 3x^2 - 3$, on résout $3a^2 - 3 = 9$, soit $a^2 = 4$. Les deux abscisses sont -2 et 2 .

En -2 , $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$, donc $T_1 : y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17$.

En 2 , $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$, donc $T_2 : y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15$. Les contacts sont $(-2; -1)$ et $(2; 3)$. Les deux droites ont bien le coefficient 9; il fallait calculer les deux, pas s'arrêter à la première solution.

20 Retrouver un polynôme

Énoncé

Le passage par $(0; 2)$ donne $c = 2$. La tangente au contact $x = 1$ fournit deux informations : $f'(1) = 4$ et $f(1) = 4 - 1 = 3$. Comme $f'(x) = 2ax + b$, on obtient $2a + b = 4$. D'autre part $a + b + 2 = 3$, donc $a + b = 1$.

1. En soustrayant cette seconde relation à la première, $a = 3$, puis $b = -2$. Ainsi $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$.

Vérification : $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(1) = 6 - 2 = 4$. La tangente est $y = 4(x - 1) + 3 = 4x - 1$.

III • CORRECTIONS

Corrections · 21 et 22

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

21 Une courbe au-dessus de sa tangente

Énoncé

On a $f(1) = 6$ et $f'(x) = 2x + 2$, donc $f'(1) = 4$. La tangente a pour équation $T(x) = 4(x - 1) + 6 = 4x + 2$. Pour comparer, on étudie la différence :

$$f(x) - T(x) = x^2 + 2x + 3 - 4x - 2 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Ce carré est positif ou nul pour tout réel x , et nul seulement en 1. La courbe est au-dessus de la tangente, avec un seul point commun (1; 6). Le signe de la différence répond à la position relative.

22 Prouver une inégalité

Énoncé

On dérive : $g'(x) = 1 - 4/x^2 = (x - 2)(x + 2)/x^2$. Pour $x > 0$, le signe est celui de $x - 2$: négatif avant 2, positif après. La fonction décroît sur $]0; 2]$ et croît sur $[2; +\infty[$. Son minimum vaut $g(2) = 2 + 4/2 = 4$. Donc $g(x) \geq 4$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement pour $x = 2$.



Vérifier. On peut vérifier autrement : $g(x) - 4 = (x - 2)^2/x \geq 0$ car $x > 0$. L'hypothèse sur le domaine est indispensable.

III • CORRECTIONS

Corrections · 23 et 24

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

23 Symétries utiles

Énoncé

Les domaines sont $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0. On a $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$: f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical. De même $g(-x) = -x^3 - x = -g(x)$: g est impaire, avec symétrie centrale par rapport à l'origine. Les dérivées sont $f'(x) = 4x^3 - 4x$ et $g'(x) = 3x^2 + 1$. La première est impaire, la seconde paire, ce que l'on vérifie en remplaçant x par $-x$. Il s'agit ici d'un constat démontré pour ces deux fonctions.

24 Une approximation contrôlée

Énoncé

Pour $f(x) = \sqrt{x}$, $f(16) = 4$ et $f'(16) = 1/(2 \times 4) = 1/8$. Ici $h = 0,24$, d'où

$$\sqrt{16,24} \approx 4 + \frac{1}{8} \times 0,24 = 4,03.$$

Le contrôle donne $4,03^2 = 16,2409$. Le nombre 4,03 est donc un peu trop grand; ce n'est pas une égalité exacte. L'écart des carrés vaut 0,0009. L'approximation linéaire donne rapidement une valeur cohérente sans prétendre calculer exactement la racine.

III • CORRECTIONS

Corrections • 25

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

25 Vitesse d'un chariot

Énoncé

1 • Variation sur tout l'intervalle. La vitesse moyenne est $v_m = [s(3) - s(1)] / (3 - 1)$, avec positions en m, durées en s et v_m en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les positions valent $s(3) = 15 \text{ m}$ et $s(1) = 3 \text{ m}$. Ainsi $v_m = (15 - 3) / 2 = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 • Vitesse à un instant. Dans ce modèle, $v(t) = s'(t) = 2t + 2$, résultat en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour t en s. Donc $v(2) = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3 • Interpréter l'égalité. Les valeurs coïncident ici, car la vitesse est affine et 2 est le milieu de $[1; 3]$. Mais la première mesure une variation globale entre deux instants, la seconde une pente locale à un instant. Pour un autre mouvement, elles pourraient différer.



Véifier. La vitesse est positive sur $[0; 5]$: la position augmente dans le sens positif choisi sur le rail.

III • CORRECTIONS

Corrections • 26

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

26 Un enclos contre un mur

Énoncé

1 • Représenter les trois côtés. Les deux profondeurs consomment $2x$ mètres et le côté opposé au mur consomme L mètres. Donc $2x + L = 40$, soit $L = 40 - 2x$, avec toutes les longueurs en m.



2 • Domaine et aire. Il faut $x > 0$ et $L = 40 - 2x > 0$, donc $0 < x < 20$. L'aire est $A(x) = xL = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$, en m^2 lorsque x est en m.

3 • Optimiser. $A'(x) = 40 - 4x$, en m pour x en m. Son signe est positif pour $x < 10$ puis négatif pour $x > 10$. L'aire est donc maximale pour $x = 10$ m. Alors $L = 20$ m et $A = 200 \text{ m}^2$.



Véifier. La clôture utilisée vaut $2 \times 10 + 20 = 40$ m. Les deux dimensions sont admissibles.

III • CORRECTIONS

Corrections • 27

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

27 Vendre des objets, gagner de l'argent

Énoncé

1 • Construire le bénéfice. La recette est $R(q) = 20q$ euros. Donc $B(q) = R(q) - C(q) = -q^2/4 + 14q - 90$ euros, avec q le nombre d'objets. Les 90 euros sont des frais fixes : il ne faut pas les oublier.

2 • Étudier les variations. Le modèle continu donne $B'(q) = -q/2 + 14$, en euros par objet. La dérivée s'annule pour $q = 28$, est positive avant, négative après. Le bénéfice croît sur $[0; 28]$, puis décroît sur $[28; 60]$.

3 • Revenir aux objets entiers. 28 est admissible et entier. Le bénéfice maximal vaut

$$B(28) = -\frac{784}{4} + 392 - 90 = -196 + 392 - 90 = 106 \text{ euros.}$$

La meilleure production est donc 28 objets vendus.

4 • Changer la contrainte. Sur $[0; 20]$, le bénéfice est croissant; il faut produire et vendre 20 objets. Le bénéfice vaut $B(20) = -100 + 280 - 90 = 90$ euros.



Vérifier. Pour 28 objets, la recette est 560 euros et le coût $196 + 168 + 90 = 454$ euros : leur différence vaut bien 106 euros.

III • CORRECTIONS

Corrections • 28

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

28 Un optimum entre deux entiers

Énoncé

1 • Le modèle continu. $B'(q) = -4q + 53$, en euros par objet. La dérivée s'annule en $q = 53/4 = 13,25$. Elle passe de positive à négative : le maximum continu est atteint en 13,25. Il vaut 151,125 euros.

2 • Les valeurs admissibles. Comme le modèle croît avant 13,25 et décroît après, seuls les deux entiers voisins 13 et 14 peuvent donner le maximum entier. On calcule

$$B(13) = -338 + 689 - 200 = 151, \quad B(14) = -392 + 742 - 200 = 150.$$

Il faut donc choisir 13 objets ; le gain maximal entier est 151 euros.

3 • La raison du contrôle. Un objet fractionnaire n'est pas admissible. La comparaison explicite des voisins convient même lorsque la fonction n'est pas une parabole symétrique ou que des contraintes supplémentaires limitent les choix.



Vérifier. Le maximum entier 151 euros est inférieur au maximum continu 151,125 euros : c'est cohérent.

III • CORRECTIONS

Corrections · 29

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

29 Une boîte ouverte

Énoncé

1 • Construire le modèle. La hauteur est x , le fond est un carré de côté $18 - 2x$. Il faut $x > 0$ et $18 - 2x > 0$, donc $0 < x < 9$ (longueurs en cm). Le volume est $V(x) = x(18 - 2x)^2$, en cm^3 .

2 • Dériver sans formule de composition. On développe : $V(x) = 324x - 72x^2 + 4x^3$. D'où $V'(x) = 324 - 144x + 12x^2 = 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x - 3)(x - 9)$, en cm^2 lorsque x est en cm.

3 • Restreindre le signe au domaine. Sur $]0; 9[$, $x - 9 < 0$. Pour $0 < x < 3$, les deux facteurs sont négatifs, donc $V' > 0$. Pour $3 < x < 9$, les signes sont contraires, donc $V' < 0$. Le volume est maximal pour $x = 3$ cm.

4 • Donner les dimensions. Le fond mesure $18 - 6 = 12$ cm de côté et la hauteur 3 cm. Le volume vaut $3 \times 12^2 = 432 \text{ cm}^3$.



Vérifier. $x = 9$ annule aussi la dérivée mais ne donne pas une boîte : le côté du fond serait nul. Les contraintes éliminent ce candidat.

III • CORRECTIONS

Corrections • 30

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

30 Une liste de pentes

Énoncé

1 • Définir la fonction. On peut écrire :

```
def f(x):  
    return x*x - x
```

2 • Simplifier avant de calculer. $f(2) = 2$ et $f(2+h) = (2+h)^2 - (2+h) = 2 + 3h + h^2$. Le taux est donc $(3h + h^2)/h = 3 + h$ pour $h \neq 0$.

3 • Lire la liste. Pour $h = 0,1, 0,01$ et $-0,01$, on attend respectivement 3,1, 3,01 et 2,99, à l'arrondi de la machine près. Ces nombres suggèrent 3.

4 • Démontrer. Lorsque $h \rightarrow 0$, l'expression exacte $3 + h$ tend vers 3. Ainsi $f'(2) = 3$. La liste numérique est une exploration; la simplification donne la preuve.

III • CORRECTIONS

Corrections • 31

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

31 Retrouver une racine avec les tangentes

Énoncé

1 • Chercher l'intersection. La tangente est $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$. Sur l'axe horizontal, $y = 0$. Comme $f'(u_n) = 2u_n \neq 0$, on peut isoler x :

$$x = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

2 • Calculer. $u_0 = 3/2$, donc $u_1 = (3/2 + 4/3)/2 = 17/12 \simeq 1,416667$. Puis

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{289 + 288}{408} = \frac{577}{408} \simeq 1,414216.$$

3 • Programmer.

```
u = 1.5
for k in range(3):
    u = (u + 2/u)/2
    print(u)
```

On obtient des valeurs très proches de 1,414213562. Cela suggère une convergence vers $\sqrt{2}$. Les trois étapes ne suffisent pas à la démontrer. L'algorithme est ici utilisé dans un cas favorable, avec un départ strictement positif.

III • CORRECTIONS

Corrections • 32

Compare le raisonnement avant de comparer seulement le résultat.

32 Auditer une étude complète

Énoncé

1 • Choisir la bonne règle. Le dénominateur $x + 1$ varie : il faut dériver un quotient. Il est positif sur $[0; 3]$.

2 • Dériver et étudier le signe.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

Le numérateur a pour racines $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$. Seule $\alpha = x_2$ appartient à $[0; 3]$. Le signe y est négatif avant α , positif après.

3 • Calculer le minimum. La division donne $f(x) = x - 1 + 2/(x+1)$. Comme $\alpha + 1 = \sqrt{2}$,

$$f(\alpha) = \sqrt{2} - 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 \simeq 0,8284.$$

La fonction décroît de $f(0) = 1$ à ce minimum, puis croît jusqu'à $f(3) = 10/4 = 2,5$. L'affirmation initiale était donc fausse.

4 • Tangente et position. $f'(0) = -1$ et $f(0) = 1$, donc $T : y = 1 - x$. Pour $x \in [0; 3]$,

$$f(x) - (1 - x) = \frac{x^2 + 1 - (1 - x)(x + 1)}{x + 1} = \frac{2x^2}{x + 1} \geq 0.$$

La courbe est au-dessus de la tangente, avec égalité seulement en 0.

 **Véifier.** Le minimum trouvé est inférieur à $f(0) = 1$: cela confirme que la fonction commence par descendre.

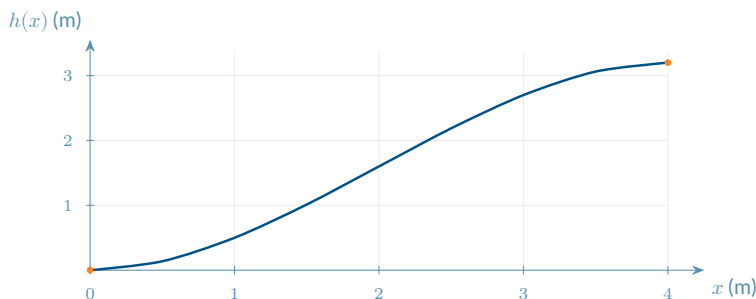
III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

Problème 33 – la rampe

Chaque résultat répond à une question de conception.

33 Concevoir une rampe progressive

Énoncé



1. $h(0) = 0$ et

$$h(4) = -0,1 \times 64 + 0,6 \times 16 = -6,4 + 9,6 = 3,2.$$

La rampe part du sol et atteint une hauteur de 3,2 m après une avancée horizontale de 4 m.

2. On dérive terme à terme :

$$h'(x) = -0,3x^2 + 1,2x = 0,3x(4 - x).$$

3. Sur $[0; 4]$, $x \geq 0$ et $4 - x \geq 0$. Donc $h'(x) \geq 0$, et même $h'(x) > 0$ pour $0 < x < 4$. Ainsi, h croît strictement de 0 à 3,2 : le profil monte sans redescendre. Le graphique confirme ce résultat, mais c'est le signe de h' qui le justifie.

4. $h'(0) = 0$ et $h(0) = 0$, donc la tangente de départ est $y = 0$. De même, $h'(4) = 0$ et $h(4) = 3,2$, donc la tangente d'arrivée est $y = 3,2$. Les deux extrémités sont horizontales : le raccord ne présente pas de rupture de pente dans ce modèle.

5. La pente moyenne vaut

$$\frac{h(4) - h(0)}{4 - 0} = \frac{3,2}{4} = 0,8.$$

Elle décrit l'élévation moyenne sur toute la rampe, pas la pente en chaque point.

6. En complétant le carré,

$$h'(x) = 1,2 - 0,3(x - 2)^2.$$

Le carré est minimal, égal à 0, pour $x = 2$. La pente maximale vaut donc $h'(2) = 1,2$.

7. On résout

$$1,2 - 0,3(x - 2)^2 > 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{6}}{3} < x < 2 + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Les bornes valent environ 1,184 et 2,816.

8. La partie centrale, entre environ 1,18 m et 2,82 m, dépasse le seuil de pente. Le dessin indique une montée régulière, mais seule l'étude de h' mesure la pente locale et localise précisément le dépassement.



Vérifier. La pente vaut 0 aux deux extrémités et atteint 1,2 au milieu : le résultat est cohérent avec la forme bombée du profil.

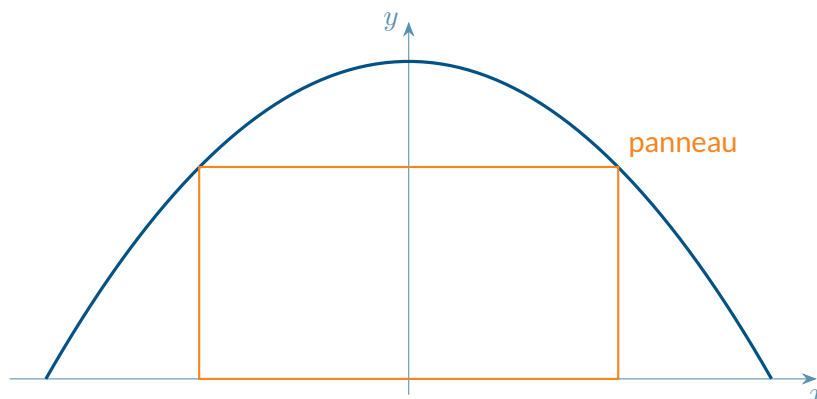
III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

Problème 34 – le panneau

La contrainte géométrique vient avant la dérivation.

34 Un panneau sous une arche

Énoncé



1. Les côtés verticaux du panneau sont aux abscisses $-x$ et x . Il faut une largeur positive et des sommets sous l'arche, d'où $0 < x < 4$.

2. La largeur vaut $2x$. La hauteur est l'ordonnée de l'arche au point d'abscisse x :

$$f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}.$$

3. L'aire est donc

$$A(x) = 2x \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) = 8x - \frac{x^3}{2}.$$

4. On obtient

$$A'(x) = 8 - \frac{3}{2}x^2 = \frac{16 - 3x^2}{2}.$$

Sur $]0; 4[$, l'équation $A'(x) = 0$ donne $x^2 = 16/3$, donc $x = 4/\sqrt{3}$; la racine négative est incompatible avec $x > 0$.

5. La dérivée est positive avant $4/\sqrt{3}$ puis négative après. L'aire croît puis décroît : elle possède donc un maximum pour $x = 4/\sqrt{3}$.

6. La largeur optimale vaut $2x = 8/\sqrt{3}$ m. La hauteur vaut

$$4 - \frac{(4/\sqrt{3})^2}{4} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ m.}$$

7. L'aire maximale est

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{3} = \frac{64}{3\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{9} \simeq 12,32 \text{ m}^2.$$

8. Pour les deux valeurs autorisées les plus proches :

$$A(2,3) = 12,3165 \text{ m}^2, \quad A(2,4) = 12,288 \text{ m}^2.$$

Il faut choisir $x = 2,3$ m, soit une largeur de 4,6 m et une hauteur de 2,6775 m.

9. Dans un choix discret, la valeur exacte optimale n'est pas admissible. Il faut comparer les deux valeurs autorisées voisines : un arrondi automatique ne constitue pas une preuve du meilleur choix.

III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

Problème 35 – la navette

Distinguer position, vitesse moyenne et vitesse instantanée.

35 Analyser le déplacement d'une navette

Énoncé

1. $s(0) = 0$ et

$$s(4) = -\frac{64}{3} + 32 + 12 = \frac{68}{3} \text{ m} \simeq 22,67 \text{ m}.$$

2. La vitesse moyenne sur $[0; 4]$ vaut

$$\frac{s(4) - s(0)}{4 - 0} = \frac{68/3}{4} = \frac{17}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 5,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. La dérivée de la position est

$$v(t) = s'(t) = -t^2 + 4t + 3.$$

4. $v(t) = 7 - (t - 2)^2$. Le carré est minimal en 2, donc la vitesse est maximale à $t = 2$ s et vaut $7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5. Pour $0 \leq t \leq 4$, $(t - 2)^2 \leq 4$, donc $v(t) \geq 3 > 0$. La position est strictement croissante : la navette avance toujours dans le sens positif choisi.

6. $s(1) = 14/3$ et $s'(1) = 6$. La tangente est

$$y = 6(t - 1) + \frac{14}{3} = 6t - \frac{4}{3}.$$

7. Comme $s(3) = 18$, la vitesse moyenne entre 1 et 3 vaut

$$\frac{18 - 14/3}{2} = \frac{20}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 6,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse instantanée au milieu vaut $v(2) = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les valeurs sont proches mais différentes : l'une décrit tout l'intervalle, l'autre un seul instant.

8. Le dépassement correspond à

$$7 - (t - 2)^2 > 6,5 \iff (t - 2)^2 < \frac{1}{2}.$$

Il se produit pour

$$2 - \frac{1}{\sqrt{2}} < t < 2 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

soit environ entre 1,293 s et 2,707 s.

9. La navette respecte le sens de déplacement, mais dépasse la limite de vitesse pendant environ 1,41 s autour de l'instant 2 s. Le réglage doit être modifié sur cette phase de l'essai.

III • CORRECTIONS DES PROBLÈMES

Problème 36 – le quotient

Un dénominateur positif ne donne pas le signe de la dérivée.

36 Auditer une étude de quotient

Énoncé

1. Le signe de f n'indique pas ses variations. Il faut calculer f' : le dénominateur positif ne permet pas, à lui seul, de conclure que les images augmentent.

2. Sur $[0; 5]$, $x + 1 \geq 1 > 0$. Le quotient est donc défini et dérivable sur tout l'intervalle.

3. Avec $u = x^2 + 4$ et $v = x + 1$,

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+4)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}.$$

4. Le numérateur a pour racines

$$x = -1 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \alpha = -1 + \sqrt{5}.$$

Seule $\alpha \simeq 1,236$ appartient à $[0; 5]$.

5. Le dénominateur est positif. Le trinôme du numérateur, de coefficient dominant positif, est négatif entre ses racines puis positif à l'extérieur. Sur $[0; 5]$, f décroît jusqu'à α , puis croît.

x	0	α	5
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	4	$2\sqrt{5} - 2$	$29/6$

6. La division $f(x) = x - 1 + 5/(x+1)$ facilite le calcul. Comme $\alpha + 1 = \sqrt{5}$,

$$f(\alpha) = \sqrt{5} - 2 + \frac{5}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 2 \simeq 2,472.$$

C'est le minimum sur $[0; 5]$.

7. $f(0) = 4$ et $f'(0) = -4$. La tangente en 0 est

$$T : y = -4x + 4.$$

8. Pour $x \in [0; 5]$,

$$f(x) - (4 - 4x) = \frac{x^2 + 4 - (4 - 4x)(x+1)}{x+1} = \frac{5x^2}{x+1}.$$

9. Le numérateur est positif ou nul et le dénominateur strictement positif. La courbe est donc au-dessus de sa tangente, avec égalité seulement en 0.

10. La tangente donne $f(0,02) \simeq 4 - 4 \times 0,02 = 3,92$. Or

$$f(0,02) = \frac{4,0004}{1,02} \simeq 3,92196.$$

L'écart est inférieur à 0,002 : l'approximation locale est cohérente.

IV • CORRECTIONS DES ÉVALUATIONS

Contrôle E1 – nombre dérivé et tangente

Une copie solide sépare calcul local, formule générale et approximation.

E1 Contrôle ciblé – nombre dérivé et tangente

Énoncé

1. $g(1) = 1 - 4 + 5 = 2$. Puis

$$g(1+h) = (1+h)^2 - 4(1+h) + 5 = 2 - 2h + h^2.$$

2. Pour $h \neq 0$,

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{-2h + h^2}{h} = -2 + h.$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux tend vers -2 . Donc $g'(1) = -2$.

3. Par dérivation terme à terme, $g'(x) = 2x - 4$; on retrouve $g'(1) = -2$.

4. Au contact $a = 1$, la tangente est

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) = -2(x-1) + 2 = -2x + 4.$$

Pour $x = 1$, elle donne $y = 2 = g(1)$: le point de contact est bien $(1; 2)$.

5. Avec $x = 1,03$, la tangente donne $-2 \times 1,03 + 4 = 1,94$. La valeur exacte est

$$g(1,03) = 1,0609 - 4,12 + 5 = 1,9409.$$

L'erreur vaut 0,0009.

6. Un taux moyen mesure la pente entre deux points distincts; le nombre dérivé est la pente limite au voisinage d'un seul point.

IV • CORRECTIONS DES ÉVALUATIONS

Contrôle E2 – production et bénéfice

Le modèle continu guide le choix entier, sans le remplacer.

E2 Contrôle de synthèse – production et bénéfice

Énoncé

1. Chaque lot est vendu $60 - q$ euros. Pour q lots, la recette est donc

$$R(q) = q(60 - q) = 60q - q^2.$$

2. Le bénéfice est la recette moins le coût :

$$B(q) = 60q - q^2 - (q^2 + 12q + 80) = -2q^2 + 48q - 80.$$

3. $B'(q) = -4q + 48 = -4(q - 12)$. La dérivée est positive pour $q < 12$, nulle en 12, négative pour $q > 12$.

q	0	12	40	
$B'(q)$		+	0	—
$B(q)$	-80	208	-1360	

4. Le maximum continu est atteint pour $q = 12$, qui est entier et admissible. Le bénéfice maximal vaut

$$B(12) = -2 \times 144 + 48 \times 12 - 80 = 208 \text{ euros.}$$

5. L'équation $B(q) = 0$ équivaut à $q^2 - 24q + 40 = 0$. Son discriminant vaut $416 = 16 \times 26$, d'où les racines

$$q_1 = 12 - 2\sqrt{26} \simeq 1,802, \quad q_2 = 12 + 2\sqrt{26} \simeq 22,198.$$

Le trinôme B est positif entre ses racines. Pour un nombre entier de lots, l'activité est bénéficiaire de $q = 2$ à $q = 22$ inclus.

6. Sur $[0; 9]$, la fonction B est croissante puisque $9 < 12$. Le meilleur choix est donc $q = 9$, avec

$$B(9) = -162 + 432 - 80 = 190 \text{ euros.}$$

7. $B(10) = 200$ et $B'(10) = 8$. La tangente est

$$y = 8(q - 10) + 200 = 8q + 120.$$

Dans le modèle continu, la pente signifie qu'au voisinage de 10 lots, une unité de production supplémentaire augmente le bénéfice d'environ 8 euros. Elle ne donne pas exactement la différence discrète entre deux nombres entiers de lots.

8. On peut contrôler que q reste entier entre 0 et 40, que le bénéfice est bien « recette moins coût », et que les valeurs diminuent après $q = 12$. Le rang précédent et le rang suivant du choix optimal constituent aussi un contrôle numérique utile.

BILAN

Ce que tu dois savoir refaire

La dérivée relie une pente locale à l'évolution d'une fonction.

Nombre dérivé	Calculer le taux pour $h \neq 0$, puis sa limite réelle finie.
Tangente	Séparer a , $f(a)$ et $f'(a)$; écrire $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Calcul	Identifier somme, produit ou quotient; préciser les domaines.
Variations	Étudier le signe de f' , calculer les images aux bornes et aux points utiles.
Extremum	Vérifier le changement de signe et les contraintes; ne pas oublier les bornes.
Modélisation	Définir variable et unités; revenir aux valeurs admissibles et aux objets entiers.

Choisis ta prochaine reprise

Taux difficiles : exercices 1 à 3. Tangentes : 5 à 7, puis 19 et 20. Dérivées : 9 à 14. Signes et variations : 15 à 18. Problèmes guidés : 25 à 32. Pour une synthèse complète en plusieurs étapes : problèmes 33 à 36. Termine par l'évaluation 1 pour vérifier les automatismes, puis par l'évaluation 2 en conditions de contrôle.



Le déclic. Tu maîtrises une méthode lorsque tu sais expliquer pourquoi elle s'applique, écrire ses conditions et contrôler le résultat sans regarder la correction.

Conditions d'utilisation

© 2026 Rémi Piau – Alors on science !

L'utilisation en classe, la projection, l'impression et la photocopie, intégrales ou partielles, sont autorisées pour un usage personnel ou pour les élèves directement accompagnés, sans vente des copies et en conservant le nom de l'auteur, la marque et les présentes mentions.

La diffusion numérique à des tiers, la mise en ligne, la publication de versions modifiées et l'exploitation commerciale du document ou de ses extraits nécessitent l'autorisation écrite préalable de Rémi Piau. Toute commercialisation est réservée à Alors on science!, sauf autorisation écrite.

Tous les autres droits sont réservés, sous réserve des exceptions prévues par la loi.