



Suites numériques

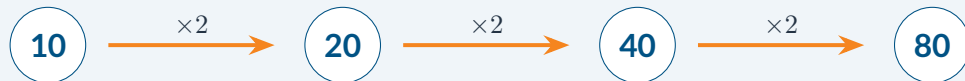
Décrire une évolution. Prévoir une valeur.

Distinguer un terme d'une somme.

Ajouter toujours la même quantité



Multiplier toujours par le même nombre



- I **Cours et savoir-faire** Les idées, les conditions et les méthodes.
- II **Exercices** 32 énoncés originaux, du calcul au modèle.
- III **Corrections détaillées** Comprendre chaque choix et contrôler le résultat.

MODE D'EMPLOI

Un chapitre pour travailler seul

Le rang indique où tu es ; le terme indique la valeur à cet endroit.

Accès directs : cours p. 3 ; exercices p. 21 ; corrections p. 30.

Ton parcours

Lire et calculer	Identifier le premier rang, puis distinguer formule explicite et relation de récurrence.
Reconnaître	Une différence constante signale une suite arithmétique ; une multiplication fixe définit une suite géométrique.
Prévoir	Étudier les variations, additionner plusieurs termes, chercher le premier dépassement d'un seuil.
Modéliser	Traduire une évolution en mots, puis en relation ; interpréter le rang et la valeur finale.

Comment utiliser les encadrés



DÉFINITION Nommer

Une notion est définie avec le sens des symboles.



SAVOIR-FAIRE Apprendre un geste

Chaque exemple explique pourquoi la méthode convient. Refais-le en cachant la solution.



Vérifier. Les contrôles rapides détectent une erreur de signe, de rang ou de nombre de termes. Ils ne remplacent pas une preuve.



Le déclic. Commence les exercices sans regarder leur correction. En cas de blocage, écris la dernière étape que tu comprends, puis relis seulement le passage correspondant du cours.

Progression. Exercices 1 à 9 : notations et variations ; 10 à 20 : suites particulières et sommes ; 21 à 28 : modèles et algorithmes ; 29 à 32 : synthèses. L'exercice 31 est un approfondissement guidé.

I • COURS ET SAVOIR-FAIRE

Avant de commencer

Trois outils qui vont servir tout au long du chapitre.

1. Les puissances comptent des multiplications

Pour $q \neq 0$, $q^0 = 1$. Pour un entier $n \geq 1$, q^n est le produit de n facteurs égaux à q . Par exemple :

$$3^4 = 81, \quad (-2)^3 = -8, \quad (-2)^4 = 16.$$

Le signe fait partie du nombre entre parenthèses : $(-2)^4 = 16$, alors que $-2^4 = -(2^4) = -16$.



PROPRIÉTÉ Déplacer un exposant

Pour $q \neq 0$ et des entiers p, n ,

$$q^{n+1} = q q^n, \quad \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p}, \quad q^n q^p = q^{n+p}.$$

Ces règles viennent du nombre de facteurs multipliés ou simplifiés.

2. Un pourcentage devient un multiplicateur

Augmenter une quantité U de $t\%$ revient à calculer

$$U + \frac{t}{100}U = \left(1 + \frac{t}{100}\right)U.$$

Une hausse de 6% multiplie donc par $1,06$; une baisse de 6% multiplie par $0,94$. Une hausse puis une baisse de 6% multiplient par $1,06 \times 0,94 = 0,9964$: elles ne s'annulent pas.

3. Soustraire une expression entière

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Si l'expression comporte plusieurs termes, conserve ses parenthèses :

$$(2n+5) - (2n-3) = 2n+5-2n+3 = 8.$$



À TOI DE JOUER Diagnostic express

Calcule $(-3)^3$, $2^7/2^4$ et $1,08 \times 250$. Développe $(n+1)^2 - 4(n+1) - (n^2 - 4n)$.

Réponse pour te vérifier : -27 ; 8 ; 270 ; $2n - 3$. Reprends la règle correspondante si une réponse te résiste.

I • COMPRENDRE

Une valeur pour chaque rang

Ne pas confondre le numéro d'une étape avec ce qui y est mesuré.



DÉFINITION Suite numérique

Une suite associe à chaque entier n de son ensemble de définition un nombre noté u_n . Le nombre n est le **rang**; u_n est le **terme de rang n** . La suite entière se note (u_n) .

Dans ce chapitre, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Une suite peut commencer au rang 0, au rang 1, ou à un autre rang précisé dans l'énoncé.

Rang n	0	1	2	3	4
Terme u_n	5	8	11	14	17
Place dans la liste	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e

Ici, le quatrième terme est $u_3 = 14$. Le terme de rang 4 est $u_4 = 17$.



DÉFINITION Formule explicite

Une formule explicite exprime directement u_n en fonction de n . Pour $u_n = 3n + 5$, on peut calculer u_{100} sans calculer les termes précédents : $u_{100} = 305$.



SAVOIR-FAIRE Remplacer tout le rang

Pour $u_n = n^2 - 2n + 4$, remplaçons **chaque** n par $n + 1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 - 2(n+1) + 4 \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 4 = n^2 + 3. \end{aligned}$$

En revanche, $u_n + 1 = n^2 - 2n + 5$. Les deux expressions désignent des opérations différentes.



POINT DE VIGILANCE Un indice n'est pas un facteur

u_{2n} signifie « le terme de rang $2n$ ». $2u_n$ signifie « deux fois le terme de rang n ». Pour $u_n = 3n + 5$, $u_{2n} = 6n + 5$, alors que $2u_n = 6n + 10$.



À TOI DE JOUER Lire la notation

Si $v_n = 4n - 1$, calcule v_0 , v_3 et v_{n+1} . Quel est le quatrième terme lorsque le premier rang est 0?

Réponse pour te vérifier : -1 ; 11 ; $4n + 3$; le quatrième terme est $v_3 = 11$.

I • SAVOIR-FAIRE 01

Avancer par récurrence

Le terme suivant se construit à partir de ce qui est déjà connu.



DÉFINITION Relation de récurrence

Une relation de récurrence décrit comment calculer un terme à partir d'un ou de plusieurs termes précédents. Avec $u_{n+1} = 0,5u_n + 4$, il faut aussi donner un premier terme pour déterminer la suite.

Prenons $u_0 = 2$. On obtient successivement :

$$u_1 = 0,5u_0 + 4 = 0,5 \times 2 + 4 = 5,$$

$$u_2 = 0,5u_1 + 4 = 0,5 \times 5 + 4 = 6,5,$$

$$u_3 = 0,5u_2 + 4 = 0,5 \times 6,5 + 4 = 7,25.$$

Chaque résultat devient l'entrée du calcul suivant. La relation ne signifie pas $u_n = 0,5n + 4$.



SAVOIR-FAIRE Quand le rang intervient lui aussi

Soit $v_1 = 4$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + 3n$.

- Pour passer de v_1 à v_2 , on prend $n = 1$: $v_2 = 4 + 3 = 7$.
- Pour passer de v_2 à v_3 , on prend $n = 2$: $v_3 = 7 + 6 = 13$.
- Pour passer de v_3 à v_4 , on prend $n = 3$: $v_4 = 13 + 9 = 22$.

Le nombre ajouté change. La présence d'un « + » ne suffit donc pas à reconnaître une suite arithmétique.

Choisir le bon mode de calcul

Une formule explicite donne un accès direct à un rang éloigné. Une récurrence impose en général de parcourir les étapes intermédiaires. Une même suite peut parfois être décrite des deux façons; il faut justifier le lien entre les écritures.



Véifier. Compte les passages : de u_0 à u_4 , il y a quatre calculs, mais cinq termes dans la liste. De v_1 à v_4 , il n'y a que trois passages.



À TOI DE JOUER Deux passages

Pour $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = 2w_n - 1$, calcule w_1 et w_2 .

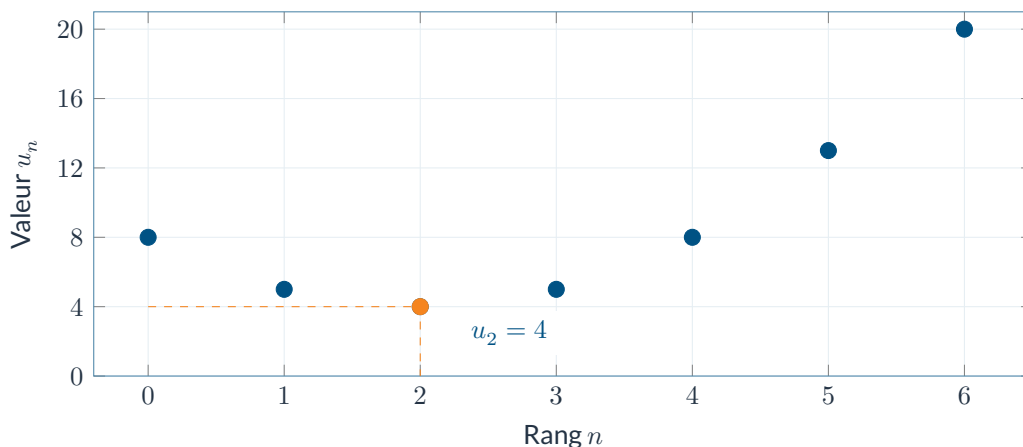
Réponse pour te vérifier : $w_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, puis $w_2 = 2 \times 5 - 1 = 9$.

I • REPRÉSENTER

Des points à rangs entiers

Une suite ne prend pas un terme à chaque abscisse réelle.

Pour représenter (u_n) , on place les points de coordonnées $(n; u_n)$. Voici les premiers termes de $u_n = (n - 2)^2 + 4$:



- Le point $(2; 4)$ signifie que le terme de rang 2 vaut 4.
- Les points ne sont pas reliés : aucun terme $u_{2,5}$ n'est défini ici.
- Les valeurs descendent jusqu'au rang 2, puis remontent. Le minimum vaut 4 et il est atteint au rang 2.



PROPRIÉTÉ Quand une fonction peut aider

Si $u_n = f(n)$ et si f est croissante sur un intervalle contenant les rangs étudiés, alors $f(n+1) \geq f(n)$: la suite y est croissante. Même raisonnement pour une fonction décroissante.

Dans notre exemple, la parabole de $f(x) = (x - 2)^2 + 4$ décroît jusqu'à 2 puis croît. On retrouve le comportement des termes. Le graphique suggère ce résultat ; l'étude de la fonction ou une différence de termes le prouve.



POINT DE VIGILANCE Quelques points ne décrivent pas toute une suite

Un dessin limité à dix rangs ne permet pas d'affirmer ce qui se passe à tous les rangs suivants. Pour une conclusion générale, on utilise la formule ou une propriété démontrée.



À TOI DE JOUER Lire sans interpoler

Dans le graphique, lis u_1 , u_4 et u_6 . Peut-on en déduire un terme $u_{1,5}$?

Réponse pour te vérifier : 5, 8, 20 ; non, les rangs de cette suite sont entiers.

I • SAVOIR-FAIRE 02

Étudier les variations

Comparer deux termes consécutifs, pour tous les rangs concernés.



DÉFINITION Croissance et décroissance

Une suite est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout rang concerné; elle est **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$. Elle est **décroissante**, ou **strictement décroissante**, lorsque les inégalités sont inversées. Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.



SAVOIR-FAIRE Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Soit $u_n = n^2 - 5n + 2$, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 5(n+1) + 2 - (n^2 - 5n + 2) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 + 2 - n^2 + 5n - 2 \\ &= 2n - 4. \end{aligned}$$

Cette différence est négative pour $n = 0, 1$, nulle pour $n = 2$, puis positive pour $n \geq 3$.

$$u_0 > u_1 > u_2 = u_3 < u_4 < u_5 < \dots$$

La suite n'est donc pas monotone sur $\mathbb{N}$. Son minimum vaut $u_2 = u_3 = -4$. Elle est strictement croissante à partir du rang 3.

Avec une fraction : mettre au même dénominateur

Pour $v_n = 2 - \frac{1}{n+1}$,

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Le dénominateur est strictement positif pour $n \geq 0$. La suite (v_n) est donc **strictement croissante**.



Vérifier. Le signe de u_n et le signe de $u_{n+1} - u_n$ répondent à deux questions différentes : position par rapport à 0 et sens de variation.



À TOI DE JOUER Une preuve courte

Montre que $w_n = 4n + 7$ est strictement croissante.

Réponse pour te vérifier : $w_{n+1} - w_n = 4(n+1) + 7 - (4n + 7) = 4 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I • CHOISIR

Comparer un quotient à 1

Une méthode pratique lorsque tous les termes sont strictement positifs.



PROPRIÉTÉ Le critère du quotient

Si $u_n > 0$ pour tout rang étudié, alors

$$u_{n+1} \geq u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

On divise par un nombre strictement positif : le sens de l'inégalité est conservé. Le même principe vaut avec $>$, $<$ ou $\leq$.



SAVOIR-FAIRE Une expression avec des puissances

Pour $u_n = 7 \times 0,6^n$, on a $u_n > 0$. On peut donc calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 \times 0,6^{n+1}}{7 \times 0,6^n} = 0,6 < 1.$$

La suite est strictement décroissante. La justification « les termes sont positifs » fait partie de la méthode.

Pourquoi la condition de signe est indispensable

Considérons maintenant $v_n = -7 \times 0,6^n$. Les premiers termes sont $-7, -4,2, -2,52$: ils augmentent, bien que le quotient soit encore $0,6$.

$$v_{n+1} - v_n = -7 \times 0,6^n (0,6 - 1) = 2,8 \times 0,6^n > 0.$$

La différence donne directement la bonne conclusion, sans diviser par un nombre négatif.



POINT DE VIGILANCE Il existe d'autres comportements

La suite $(-1)^n$ donne $1, -1, 1, -1, \dots$: elle n'est ni croissante ni décroissante. Si un terme vaut 0 , le quotient par ce terme n'existe pas. Dans ces situations, reviens à la définition ou à la différence.



Le déclic. Choisis la méthode qui simplifie vraiment le calcul : différence pour les sommes et polynômes ; quotient pour les produits de puissances, après contrôle de la positivité.



À TOI DE JOUER La condition d'abord

La suite $3 \times 1,2^n$ est-elle strictement croissante ?

Réponse pour te vérifier : Oui : ses termes sont strictement positifs et le quotient de deux termes consécutifs vaut $1,2 > 1$.

I • COMPRENDRE

Les suites arithmétiques

Ajouter la même quantité à chaque passage.



DÉFINITION Raison additive

Une suite est arithmétique de raison r si, pour tout rang concerné,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Autrement dit, $u_{n+1} - u_n = r$ est constant. La raison r peut être positive, négative ou nulle.

Avec $u_0 = 9$ et $r = 4$, on obtient 9, 13, 17, 21, ...; avec $r = -4$, on soustrait 4 à chaque passage.



PROPRIÉTÉ Terme général et changement de rang

Pour une suite arithmétique de raison r ,

$$u_n = u_0 + nr$$

et plus généralement

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Si le premier terme est u_1 , on écrit $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Pourquoi? Pour $n > p$, de u_p à u_n , on effectue $n - p$ passages, donc $n - p$ additions de r . Pour $n < p$, on remonte les passages en soustrayant r : la même formule reste valable.



SAVOIR-FAIRE Partir d'un terme connu, même éloigné du début

Si $u_5 = 26$ et $r = -3$, alors

$$u_{12} = u_5 + (12 - 5)r = 26 + 7 \times (-3) = 5.$$

Pour retrouver le rang 0 : $u_0 = 26 + (0 - 5)(-3) = 41$.

Variations : elles se lisent sur r

La différence $u_{n+1} - u_n$ vaut r : si $r > 0$, la suite est strictement croissante; si $r < 0$, strictement décroissante; si $r = 0$, constante.



À TOI DE JOUER Compter les passages

Une suite arithmétique vérifie $v_1 = 12$ et $r = 5$. Calcule v_8 .

Réponse pour te vérifier : Il y a sept passages : $v_8 = 12 + 7 \times 5 = 47$.

I • SAVOIR-FAIRE 03

Retrouver une suite arithmétique

Deux termes distincts déterminent sa raison.



SAVOIR-FAIRE De deux mesures à une formule

On sait qu'une suite est arithmétique et que $u_3 = 17$, $u_9 = 41$.

1 • Relier les rangs. De 3 à 9, il y a six passages :

$$u_9 = u_3 + 6r \implies 41 = 17 + 6r.$$

2 • Isoler la raison.

$$r = \frac{41 - 17}{6} = 4.$$

3 • Retrouver un terme général.

$$u_n = 17 + (n - 3) \times 4 = \boxed{4n + 5}.$$

On vérifie $u_3 = 17$ et $u_9 = 41$ dans cette formule.



POINT DE VIGILANCE Deux valeurs seules ne prouvent pas la nature

On a utilisé l'hypothèse « la suite est arithmétique ». Sans cette information, deux termes ne suffisent pas à déterminer tous les autres. Même trois termes régulièrement espacés ne prouvent pas une propriété pour tous les rangs.

Construire un modèle avec une phrase précise

Un atelier dispose de 120 pièces au début du suivi. Chaque jour, son stock augmente *au total* de 18 pièces. Si s_n est le stock après n jours,

$$s_0 = 120, \quad s_{n+1} = s_n + 18, \quad s_n = 120 + 18n.$$

L'hypothèse porte sur la variation nette du stock, après entrées et sorties. Elle doit être adaptée à la période étudiée.



Le déclic. Distingue « le stock augmente de 18 pièces » et « le stock augmente de 18 % ». La première phrase ajoute une quantité fixe ; la seconde multiplie par 1,18.



À TOI DE JOUER Un départ au rang 1

Une suite arithmétique vérifie $v_2 = 13$ et $v_7 = 33$. Détermine r puis v_1 .

Réponse pour te vérifier : $r = (33 - 13)/(7 - 2) = 4$; $v_1 = 13 - 4 = 9$.

I • SAVOIR-FAIRE 04

Additionner des termes arithmétiques

Premier terme, dernier terme, nombre de termes : les trois repères.



PROPRIÉTÉ Somme de termes consécutifs

Pour une suite arithmétique et des rangs $p \leq q$,

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_q = (q - p + 1) \frac{u_p + u_q}{2}.$$

Le nombre de termes vaut $q - p + 1$, car les deux extrémités sont incluses.

Démonstration. Écrivons la somme S dans les deux sens, puis additionnons les colonnes :

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_q,$$

$$S = u_q + u_{q-1} + \dots + u_p.$$

Chaque paire vaut $u_p + u_q$, car l'un des termes gagne r lorsque l'autre perd r . Il y a $q - p + 1$ paires, donc $2S = (q - p + 1)(u_p + u_q)$.



SAVOIR-FAIRE Une somme qui ne commence pas au premier rang

Pour $u_n = 6 + 3n$, calculons $S = u_4 + \dots + u_{15}$.

- Premier terme : $u_4 = 18$; dernier terme : $u_{15} = 51$.
- Nombre de termes : $15 - 4 + 1 = 12$.
- Somme : $S = 12 \times (18 + 51)/2 = \boxed{414}$.

Un résultat à connaître et à comprendre

Les nombres $1, 2, \dots, n$ forment une suite arithmétique. Ils sont n et leurs extrémités sont 1 et n . Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par exemple, $1 + \dots + 40 = 40 \times 41/2 = 820$.



Vérifier. Pour compter de 4 à 15, le nombre de passages est 11, mais le nombre de termes est 12. Écris les bornes avant de choisir une formule.



À TOI DE JOUER Une petite somme

Calcule $11 + 15 + 19 + 23 + 27$.

Réponse pour te vérifier : Cinq termes de raison 4 : $5 \times (11 + 27)/2 = 95$.

I • COMPRENDRE

Les suites géométriques

Multiplier par le même nombre à chaque passage.



DÉFINITION Raison multiplicative

Une suite est géométrique de raison q si, pour tout rang concerné,

$$u_{n+1} = q u_n.$$

Lorsque $u_n \neq 0$, le quotient u_{n+1}/u_n vaut donc q . La définition par multiplication reste valable si certains termes sont nuls.



PROPRIÉTÉ Terme général

Pour une suite géométrique de raison $q \neq 0$,

$$u_n = u_0 q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_p q^{n-p}.$$

Si la suite commence au rang 1, $u_n = u_1 q^{n-1}$.

Pourquoi? Pour aller du rang p au rang $n > p$, on multiplie $n - p$ fois par q . Pour remonter les rangs, on divise par q , ce qui exige $q \neq 0$.



SAVOIR-FAIRE Calculer dans les deux sens

On sait que $v_2 = 20$ et $q = 1,5$. Pour avancer jusqu'au rang 5 :

$$v_5 = 20 \times 1,5^{5-2} = 67,5.$$

Pour retrouver le rang 0, on annule deux multiplications :

$$v_0 = \frac{20}{1,5^2} = \frac{80}{9}.$$

On conserve cette valeur exacte si elle doit servir dans un autre calcul.

Deux cas particuliers à traiter directement

Si $u_0 = 0$, tous les termes suivants sont nuls, quelle que soit la raison. Si $q = 0$, alors $u_1 = u_2 = \dots = 0$, mais u_0 reste le terme initial donné. On n'a pas besoin d'écrire 0^0 .



À TOI DE JOUER Rang de départ

Pour $w_1 = 5$ et $q = 3$, calcule w_4 et écris w_n .

Réponse pour te vérifier : $w_4 = 5 \times 3^3 = 135$; $w_n = 5 \times 3^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

I • CHOISIR

Géométrie : signe et variations

La raison seule ne donne pas toujours le sens de variation.

Pour $u_n = u_0 q^n$ avec $q > 0$, tous les termes ont le signe de u_0 et

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1).$$

Le facteur q^n est strictement positif. Le signe de la différence est donc celui du produit $u_0 (q - 1)$.

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
$q > 1$	Strictement croissante	Strictement décroissante
$0 < q < 1$	Strictement décroissante	Strictement croissante
$q = 1$	Constante	Constante

Si $u_0 = 0$, la suite est constante et nulle.



SAVOIR-FAIRE Justifier sans apprendre un tableau isolé

Pour $u_n = -4 \times 1,3^n$,

$$u_{n+1} - u_n = -4 \times 1,3^n \times 0,3 < 0.$$

La suite est strictement décroissante. Les termes $-4, -5,2, -6,76$ confirment le sens trouvé.

Si $q < 0$: les signes alternent

Lorsque $u_0 \neq 0$ et $q < 0$, deux termes successifs sont de signes opposés. La suite n'est pas monotone : le sens d'évolution change d'un passage au suivant. Par exemple, pour $u_n = 2(-0,5)^n$:

$$2, -1, 0,5, -0,25, 0,125, \dots$$

Si $q = 0$, étudie séparément la liste $u_0, 0, 0, \dots$: elle est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$, sans être strictement monotone.



POINT DE VIGILANCE Un rapport non défini ne prouve rien

Pour la suite nulle, u_{n+1}/u_n n'existe pas. Pourtant la suite est géométrique : $0 = q \times 0$ pour toute raison q .



À TOI DE JOUER Les deux signes

Compare les variations de $6 \times 0,8^n$ et $-6 \times 0,8^n$.

Réponse pour te vérifier : La première est strictement décroissante ; la seconde strictement croissante.

I • SAVOIR-FAIRE 05

Additionner des termes géométriques

Le nombre de termes devient l'exposant de la formule.



PROPRIÉTÉ Somme géométrique

Pour $q \neq 0, q \neq 1$ et un entier $N \geq 1$,

$$1 + q + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

Ainsi, pour N termes consécutifs d'une suite géométrique, de premier terme a et de raison $q \neq 1$,

$$S = a \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, tous les termes valent a : $S = Na$. Si $q = 0$, la somme vaut $a + 0 + \dots + 0 = a$, ce que donne aussi la formule.

Démonstration. Posons $T = 1 + q + \dots + q^{N-1}$. Alors $qT = q + q^2 + \dots + q^N$. En soustrayant, les termes intermédiaires disparaissent :

$$T - qT = 1 - q^N \implies (1 - q)T = 1 - q^N.$$

On divise par $1 - q$, qui est non nul puisque $q \neq 1$.



SAVOIR-FAIRE Une somme commençant au rang 3

Pour $u_n = 40 \times 0,5^n$, calculons $u_3 + \dots + u_7$. Le premier terme vaut $u_3 = 5$; il y a $7 - 3 + 1 = 5$ termes. Donc

$$S = 5 \frac{1 - 0,5^5}{1 - 0,5} = 9,6875.$$

On peut contrôler en additionnant $5 + 2,5 + 1,25 + 0,625 + 0,3125$.

Deux écritures équivalentes

Pour $q > 1$, la forme $a(q^N - 1)/(q - 1)$ évite deux nombres négatifs. Elle est égale à la précédente, car on change le signe du numérateur et celui du dénominateur.



Vérifier. De u_0 à u_n , il y a $n + 1$ termes. L'exposant dans la somme est donc $n + 1$, alors que l'exposant de $u_n = u_0 q^n$ est n .



À TOI DE JOUER Terme ou somme?

Calcule $2 + 6 + 18 + 54$.

Réponse pour te vérifier : Quatre termes, raison 3 : $2(3^4 - 1)/(3 - 1) = 80$. Le dernier terme seul vaut 54.

I • MODÉLISER

Traduire une évolution

La phrase qui décrit le passage détermine la relation.



SAVOIR-FAIRE Une baisse régulière en pourcentage

Une réserve contient initialement 600 L. Chaque semaine, son volume diminue de 15 % sans autre apport. On note V_n le volume après n semaines.

$$V_0 = 600, \quad V_{n+1} = V_n - 0,15V_n = 0,85V_n.$$

La suite est géométrique de raison 0,85, donc

$$V_n = 600 \times 0,85^n.$$

Après trois semaines, $V_3 = 368,475$ L, soit environ 368,5 L. On conserve la valeur non arrondie pour poursuivre le modèle.

Ajouter et multiplier ne se permutent pas

Si, chaque semaine, la réserve perd 15 % puis reçoit 20 L,

$$V_{n+1} = 0,85V_n + 20.$$

Si elle reçoit d'abord 20 L, puis perd 15 % de l'ensemble,

$$V_{n+1} = 0,85(V_n + 20) = 0,85V_n + 17.$$

Les deux protocoles n'ont pas le même effet. Ces relations ne décrivent généralement ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.



POINT DE VIGILANCE Interpréter le rang jusqu'au bout

Si u_0 décrit une mesure au début de 2026 et qu'un passage correspond à un an, u_4 décrit le début de 2030. Une réponse « $n = 4$ » doit être traduite dans le calendrier demandé.

Le modèle a un domaine d'emploi

Un pourcentage constant est une hypothèse. Pour une population d'objets entiers, une formule peut donner une valeur non entière : on précise s'il s'agit d'une estimation, d'une moyenne ou d'une valeur à arrondir selon le contexte. On n'arrondit pas automatiquement à chaque passage.



À TOI DE JOUER Écrire avant de calculer

Un stock augmente de 25 unités par jour. Un autre augmente de 25 % par jour. Écris leurs relations de passage.

Réponse pour te vérifier : $a_{n+1} = a_n + 25$; $b_{n+1} = 1,25b_n$.

I • SAVOIR-FAIRE 06

Trouver le premier seuil

Atteindre une valeur et l'atteindre pour la première fois sont deux exigences.



SAVOIR-FAIRE Une suite arithmétique : résoudre une inégalité

Soit $u_n = 75 + 12n$. Cherchons le premier rang tel que $u_n \geq 200$.

$$75 + 12n \geq 200 \iff n \geq \frac{125}{12} \simeq 10,42.$$

Le rang est entier : le premier candidat est $n = 11$. On contrôle :

$$u_{10} = 195 < 200, \quad u_{11} = 207 \geq 200.$$

Comme la suite est croissante, les rangs antérieurs ne conviennent pas.

Une suite géométrique : parcourir les termes

Soit $v_n = 500 \times 0,75^n$. On cherche le premier rang tel que $v_n < 120$. Une boucle calcule les termes successifs jusqu'à ce que la condition soit vérifiée.

```
n = 0
v = 500
while v >= 120:
    v = 0.75 * v
    n = n + 1
print(n, v)
```

On obtient $n = 5$ et $v_5 = 118,65234375$. Au rang précédent, $v_4 = 158,203125$. La suite est strictement décroissante : le premier rang cherché est donc 5.



POINT DE VIGILANCE La condition de poursuite est le contraire du but

Le but est $v < 120$; on continue tant que $v \geq 120$. Si le but était $v \leq 120$, on continuerait tant que $v > 120$. L'égalité au seuil peut changer la réponse.



Vérifier. Une boucle de seuil doit pouvoir s'arrêter. Pour une suite constante égale à 500, le même seuil 120 ne serait jamais atteint. Il faut regarder l'évolution avant de lancer le programme.



À TOI DE JOUER Choisir la condition

On cherche le premier n tel que $u_n > 1000$. Quelle condition maintient la boucle?

Réponse pour te vérifier : On continue tant que $u \leq 1000$. Le compteur doit rester synchronisé avec le terme calculé.

I • ALGORITHMES

Calculer un terme ou une somme

Le rôle de chaque variable permet de contrôler la boucle.

Calculer u_N à partir de u_0

Pour $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$, il faut exactement N passages pour obtenir u_N .

```
N = 5
u = 3
for k in range(N):
    u = 2 * u + 1
print(u)
```

La liste des termes est 3, 7, 15, 31, 63, 127; le programme affiche $u_5 = 127$. En Python, `range(N)` fournit $0, 1, \dots, N - 1$: il y a bien N tours.

Additionner de u_0 à u_N

Pour la même suite, on conserve en plus une variable S , qui contient la somme déjà calculée.

```
N = 5
u = 3
S = u
for k in range(N):
    u = 2 * u + 1
    S = S + u
print(S)
```

Le premier terme est ajouté avant la boucle. Chacun des cinq tours ajoute ensuite un nouveau terme. On obtient $S = 246$.



SAVOIR-FAIRE Vérifier sur un cas que l'on maîtrise

Pour $N = 0$, la boucle ne tourne pas : le premier programme donne $u_0 = 3$, le second la somme réduite à ce seul terme, $S = 3$. Pour $N = 1$, on doit obtenir $u_1 = 7$ et $S = 3 + 7 = 10$.

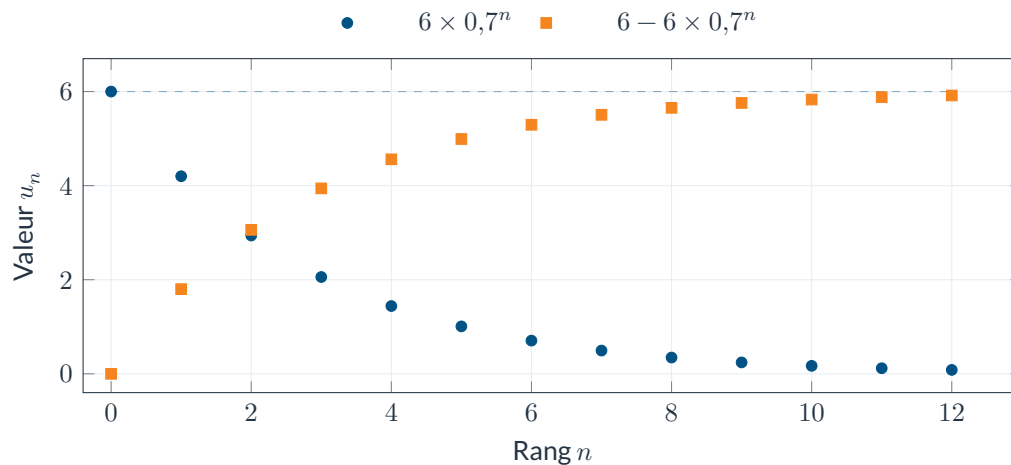


Le déclic. Quand la relation contient explicitement n , le compteur doit avoir le bon rang. Pour $u_{n+1} = u_n + 2n$ avec un départ au rang 1, on utilise par exemple `range(1, N)` pour aller jusqu'à u_N .

I • COMPRENDRE

Que deviennent les termes?

Une première lecture des comportements à grand rang.



- Les termes $6 \times 0,7^n$ se rapprochent de 0 sans l'atteindre : on dit que la suite **tend vers 0**.
- Les termes $6 - 6 \times 0,7^n$ se rapprochent de 6 par valeurs inférieures : la suite **tend vers 6**.

L'idée d'une limite finie est la suivante : pour des rangs assez grands, les termes restent aussi proches que souhaité d'un même nombre. Nous utilisons ici cette idée sans formalisation technique.

D'autres suites ne se stabilisent pas

Pour $u_n = 4n + 1$, les valeurs finissent par dépasser n'importe quel seuil fixé : la suite tend vers $+\infty$. Pour $v_n = -2n$, elles passent sous n'importe quel seuil : elle tend vers $-\infty$. La suite $w_n = (-1)^n$ alterne entre 1 et -1 : elle n'a ni limite finie ni limite infinie.



POINT DE VIGILANCE Variation, signe et limite : trois informations

Une suite peut être croissante et se rapprocher d'un nombre fini, comme $6 - 6 \times 0,7^n$. Elle peut ne pas être monotone et pourtant se rapprocher de 0, comme $(-0,5)^n$, dont le signe alterne et la valeur absolue diminue.



Vérifier. Un écran montre un nombre fini de termes. Il permet une conjecture ; il ne garantit pas, à lui seul, le comportement de tous les rangs suivants.



À TOI DE JOUER Décrire avec des mots

Quel comportement attends-tu pour $2 + 5 \times 0,4^n$?

Réponse pour te vérifier : Les termes se rapprochent de 2 par valeurs supérieures. Ils sont strictement décroissants.

I • APPROFONDIR

Faire apparaître une suite géométrique

Un changement de point de repère, guidé par la relation.

Cette page est un prolongement accompagné. On étudie $u_0 = 4$ et

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 6.$$

Le terme « +6 » empêche de reconnaître directement une suite géométrique. On cherche une valeur ℓ qui resterait inchangée après un passage :

$$\ell = 0,5\ell + 6 \implies \ell = 12.$$



SAVOIR-FAIRE Étudier l'écart à la valeur fixe

Posons $v_n = u_n - 12$, donc $u_n = v_n + 12$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12 \\ &= 0,5u_n + 6 - 12 \\ &= 0,5(v_n + 12) - 6 = 0,5v_n. \end{aligned}$$

Le terme constant a disparu : (v_n) est géométrique de raison 0,5. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 12 = -8$; ainsi

$$v_n = -8 \times 0,5^n, \quad \boxed{u_n = 12 - 8 \times 0,5^n}.$$

Revenir à la question initiale

Pour calculer u_5 , on utilise maintenant la formule explicite :

$$u_5 = 12 - 8 \times 0,5^5 = 11,75.$$

La suite (v_n) est strictement croissante car son premier terme est négatif et sa raison est entre 0 et 1. Ajouter 12 ne change pas le sens de variation : (u_n) est strictement croissante. Ses termes se rapprochent de 12 par valeurs inférieures.



Vérifier. À $n = 0$, la formule donne bien $12 - 8 = 4$. À $n = 1$, elle donne 8, comme la relation $0,5 \times 4 + 6$.



À TOI DE JOUER Trouver le bon écart

Pour $w_{n+1} = 0,8w_n + 10$, quelle valeur fixe cherches-tu à soustraire ?

Réponse pour te vérifier : On résout $\ell = 0,8\ell + 10 : 0,2\ell = 10$, donc $\ell = 50$.

I • FAIRE LE POINT

Choisir une méthode

Commence par préciser l'objet : un terme, un rang ou une somme.

Ce que tu cherches	Ce qui fait avancer
Calculer un terme	Remplacer le rang dans une formule explicite, ou avancer avec la récurrence.
Reconnaître une suite arithmétique	Établir $u_{n+1} - u_n = r$, avec r indépendant de n .
Reconnaître une suite géométrique	Établir $u_{n+1} = qu_n$, avec q indépendant de n .
Étudier les variations	Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$; utiliser un quotient si les termes sont strictement positifs.
Additionner plusieurs termes	Identifier le premier, le dernier et leur nombre; choisir la formule adaptée à la nature.
Chercher un premier seuil	Résoudre une inégalité ou parcourir les termes; vérifier aussi le rang précédent.
Traduire un phénomène	Définir u_n , le rang initial et la durée d'un passage; traduire les opérations dans leur ordre.

Cinq questions avant de rendre une solution

1. Mon premier terme est-il u_0 , u_1 ou un autre terme?
2. Ai-je confondu le nombre de passages et le nombre de termes?
3. La raison est-elle additive ou multiplicative? Est-elle constante?
4. La condition qui autorise ma méthode est-elle vérifiée?
5. Ai-je interprété le résultat avec le bon rang, la bonne date et la bonne unité?



À TOI DE JOUER Autoévaluation avant les exercices

Explique pourquoi $u_n = 5 + 2n$ est arithmétique et pourquoi $v_n = 5 \times 2^n$ est géométrique. Que faudrait-il identifier avant de calculer $u_4 + \dots + u_{12}$?

Réponse pour te vérifier : Pour (u_n) , la différence vaut 2; pour (v_n) , $v_{n+1} = 2v_n$. Pour la somme : u_4 , u_{12} et $12 - 4 + 1 = 9$ termes.

II • EXERCICES

Lire, remplacer, calculer

Écris les substitutions avant de simplifier.

1 Le rang n'est pas la place

Bases

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2n^2 - 3n + 1$.

1. Calcule les cinq premiers termes.
2. Donne le terme de rang 3, puis le quatrième terme.
3. Quel rang possède le dixième terme?

Correction 1

2 Quatre expressions différentes

Bases

Soit $u_n = 3n - 2$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Écris u_{n+1} , u_{2n} , $2u_n$ et $u_n + 1$ en fonction de n .
2. Compare leurs valeurs pour $n = 4$.
3. Existe-t-il un rang n tel que $u_n = 40$?

Correction 2

3 Conserver les valeurs exactes

Bases

On donne $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ pour $n \geq 0$.

1. Calcule u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions.
2. Un élève écrit $u_3 = \frac{1}{2} \times 3 + 3$. Explique sa confusion.
3. Ces premiers termes suffisent-ils à prouver que la suite est toujours croissante?

Correction 3

4 Une addition qui dépend du rang

Bases

Soit $v_1 = 7$ et $v_{n+1} = v_n + 2n$ pour $n \geq 1$.

1. Calcule les cinq premiers termes.
2. Combien de passages permettent d'obtenir le cinquième terme?
3. La suite est-elle arithmétique? Justifie.

Correction 4

II • EXERCICES

Représenter et comparer

Une conclusion générale doit porter sur tous les rangs concernés.

5 Des points sur une grille

Application

On donne $u_n = (n - 2)^2 + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Dresse le tableau des valeurs de u_0 à u_6 et représente les points $(n; u_n)$.
2. Calcule $u_{n+1} - u_n$. Déduis-en les variations et le minimum de la suite.
3. Pourquoi ne relie-t-on pas les points par une parabole pour représenter cette suite?

Correction 5

6 Deux rangs au même minimum

Application

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 7n + 8$.

1. Établis $u_{n+1} - u_n = 2n - 6$.
2. Décris précisément les variations, y compris l'égalité entre deux termes successifs.
3. Détermine le minimum et les rangs où il est atteint.

Correction 6

7 Une fraction qui se simplifie

Application

Soit $u_n = \frac{3n + 2}{n + 1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montre que $u_n = 3 - \frac{1}{n + 1}$.
2. Prouve que la suite est strictement croissante et que tous ses termes sont inférieurs à 3.
3. Quel comportement peux-tu conjecturer à grand rang?

Correction 7

8 Même raison, effets différents

Choisir

Étudie les variations de $a_n = 5(3/4)^n$ et $b_n = -5(3/4)^n$. Justifie ensuite que $c_n = (-1/2)^n$ n'est pas monotone. Explique pourquoi le quotient ne s'interprète pas de la même façon dans les trois cas.

Correction 8

II • EXERCICES

Reconnaître une structure

Une suite particulière exige une propriété, pas une ressemblance.

9 Trois valeurs ne font pas une preuve

Raisonner

On pose $u_n = n^2$ et $v_n = n^2 + n(n-1)(n-2)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Compare les termes de rangs 0, 1 et 2.
2. Compare les termes de rang 3.
3. Que réponds-tu à l'affirmation : « Les trois premiers termes sont égaux, donc les deux suites sont identiques » ?

[Correction 9](#)

10 Passer sous zéro

Application

Une suite arithmétique a pour premier terme $u_0 = 14$ et pour raison -3 .

1. Écris u_n et calcule u_7 .
2. Trouve le premier rang où le terme est strictement négatif.
3. Vérifie le terme de rang précédent.

[Correction 10](#)

11 Deux termes éloignés

Application

Une suite arithmétique vérifie $u_4 = 19$ et $u_{11} = -9$. Détermine sa raison, son terme u_0 et son terme u_{20} . Contrôle les deux valeurs données avec ta formule.

[Correction 11](#)

12 Un petit théâtre en gradins

Modéliser

Un théâtre installe 16 rangées. La première comporte 18 sièges et chaque rangée suivante en comporte 4 de plus.

1. Définis une suite s_n avec un premier rang égal à 1.
2. Calcule le nombre de sièges de la dernière rangée.
3. Calcule la capacité totale du théâtre.

[Correction 12](#)

II • EXERCICES

Compter les termes

Écris les bornes de chaque somme.

13 Une somme à termes négatifs

Application

Soit $u_n = 7 - 2n$. Calcule $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{18}$ en précisant le premier terme, le dernier et leur nombre. Le signe du résultat est-il cohérent avec la liste?

[Correction 13](#)**14** Le nombre de termes est caché

Application

Calcule $9 + 14 + 19 + \dots + 84$. Justifie d'abord que 84 est un terme de la progression et détermine sa place.

[Correction 14](#)**15** Une raison négative

Application

Une suite géométrique vérifie $u_0 = 3$ et $q = -2$.

1. Calcule les cinq premiers termes et u_7 .
2. Donne une formule explicite.
3. La suite est-elle monotone? Justifie avec des comparaisons successives.

[Correction 15](#)**16** Remonter les multiplications

Application

Une suite géométrique a pour raison 0,5 et vérifie $v_2 = 48$.

1. Retrouve v_0 .
2. Calcule v_7 directement à partir de v_2 .
3. Un élève propose $48 \times 0,5^7$. Quel terme a-t-il calculé?

[Correction 16](#)

II • EXERCICES

Retrouver et additionner

Le signe d'une raison peut nécessiter une information supplémentaire.

17 Une raison à déterminer

Raisonner

Une suite géométrique de raison réelle q vérifie $w_3 = 54$ et $w_6 = 1458$. Détermine q puis w_0 .

[Correction 17](#)**18** Deux raisons possibles

Raisonner

Une suite géométrique vérifie $w_1 = 12$ et $w_3 = 3$.

1. Détermine toutes les raisons réelles possibles.
2. Quelle raison retient-on si l'on sait que tous les termes sont strictement positifs?
3. Donne alors w_0 .

[Correction 18](#)**19** Une somme qui double

Application

Calcule $3 + 6 + 12 + \dots + 384$. Explique pourquoi la somme contient huit termes.

[Correction 19](#)**20** La somme commence au rang 2

Application

Pour $u_n = 160 \times 0,5^n$, calcule $u_2 + u_3 + \dots + u_8$. Donne une valeur exacte, puis contrôle-la par l'addition directe des termes.

[Correction 20](#)

II • EXERCICES

Construire un modèle

Le rang et l'ordre des opérations font partie de la réponse.

21 Réduire les déchets d'un atelier

Modéliser

En 2026, un atelier produit 500 kg de déchets. Il modélise ses objectifs futurs par une baisse de 12 % par an. On note M_n la masse prévue pour l'année 2026 + n .

1. Donne M_0 et la relation de passage.
2. Écris M_n puis calcule la prévision pour 2029.
3. Pourquoi la suite n'est-elle pas arithmétique?

Correction 21

22 Deux scénarios de fréquentation

Comparer

Deux modèles estiment une fréquentation mensuelle : $A_n = 200 + 40n$ et $B_n = 200 \times 1,15^n$, avec $n = 0$ au premier mois. Les valeurs sont des estimations moyennes.

1. Explique l'évolution décrite par chaque modèle.
2. À l'aide d'un tableau ou d'un programme, trouve le premier rang où $B_n > A_n$.
3. Traduis le résultat en numéro de mois et indique les valeurs au rang précédent.

Correction 22

23 L'ordre d'un versement

Modéliser

Dans un modèle fictif, une réserve de 300 € augmente de 1 % chaque mois, puis reçoit un versement de 40 €. u_n est son montant après n mois. On ne fait aucun arrondi intermédiaire.

1. Écris la relation entre u_{n+1} et u_n , puis calcule u_1 et u_2 .
2. Écris la relation si le versement précède la hausse.
3. Quelle est la différence entre les deux opérations mensuelles appliquées à un même montant?

Correction 23

24 Deux termes pour calculer le suivant

Algorithmique

On définit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Calcule F_2 à F_7 , puis complète un algorithme qui conserve deux variables $a = F_n$ et $b = F_{n+1}$ pour avancer d'un rang. Pourquoi faut-il conserver l'ancienne valeur de a pendant la mise à jour?

Correction 24

II • EXERCICES

Seuils et programmes

Teste les cas limites avant d'interpréter l'affichage.

25 Atteindre ou dépasser

Application

Pour $u_n = 125 + 18n$, trouve le premier rang tel que $u_n \geq 500$, puis le premier rang tel que $u_n > 503$. Justifie la différence entre les deux réponses.

[Correction 25](#)**26 Un seuil géométrique**

Algorithmique

Soit $v_n = 800 \times 0,8^n$. Écris un programme qui trouve le premier rang tel que $v_n < 100$. Donne le rang trouvé, le terme correspondant et le terme précédent, arrondis au centième.

[Correction 26](#)**27 Une boucle trop courte**

Diagnosticuer

Pour $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$, un élève veut calculer u_{10} :

```
u = 2
for k in range(1, 10):
    u = u + 3
print(u)
```

Quel terme obtient-il? Corrige le programme et vérifie la bonne valeur par une formule explicite.

[Correction 27](#)**28 Accumuler au bon moment**

Algorithmique

On veut calculer $S = u_0 + \dots + u_5$, où $u_n = 10 \times 1,2^n$. Écris un programme utilisant les variables u et S , puis calcule la somme avec la formule géométrique. Explique comment ton initialisation évite de perdre u_0 .

[Correction 28](#)

II • EXERCICES

Des motifs et une production

Les quantités sont entières; les modèles doivent respecter cette contrainte.

29 Entourer un carré

Synthèse

Un motif est un carré de n carreaux de côté, avec $n \geq 1$. On ajoute autour de lui une bordure d'un carreau d'épaisseur. Le carré extérieur a donc $n + 2$ carreaux de côté.

1. Exprime le nombre b_n de carreaux de la bordure comme une différence de deux aires.
2. Développe, puis montre que (b_n) est arithmétique.
3. On réalise un exemplaire de chacun des motifs de rangs 1 à 12. Combien de carreaux faut-il pour les seules bordures?
4. Pourquoi additionner $(n + 2)^2$ donnerait-il une autre quantité?

Correction 29

30 Préparer des badges pour un événement

Synthèse

Un atelier réalise 18 badges le premier jour. Il prévoit d'en réaliser chaque jour 3 de plus que la veille, sans dépasser sa capacité de 54 badges par jour. Tous les badges produits sont conservés.

1. On note d_n la production du jour n , à partir de $n = 1$. Écris d_n .
2. Exprime la production cumulée T_N des N premiers jours.
3. Quel est le premier jour à la fin duquel l'atelier dispose d'au moins 400 badges?
4. Le programme respecte-t-il alors la capacité quotidienne? Jusqu'à quel jour la progression prévue reste-t-elle compatible avec cette capacité?

Correction 30

II • EXERCICES

Relier plusieurs idées

Distingue une évolution mensuelle de ce qui est cumulé.

31 Un écart qui se réduit

Approfondissement guidé

On donne $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 6$.

1. Résous $\ell = 0,8\ell + 6$.
2. Pose $v_n = u_n - \ell$. Montre que (v_n) est géométrique et détermine v_0 .
3. Dédus une formule explicite pour u_n , puis ses variations.
4. Quelle limite peux-tu conjecturer?
5. Trouve le premier rang tel que $u_n \geq 28$ et vérifie le rang précédent.

Correction 31

32 Choisir une collecte associative

Synthèse

Deux scénarios décrivent les montants mensuels recueillis par une association, en euros :

$$A_n = 60 + 10n, \quad B_n = 40 \times 1,25^n,$$

où $n = 0$ correspond au premier mois. Les montants sont des prévisions; on n'arrondit qu'à la fin des calculs.

1. Donne la nature et la raison de chaque suite.
2. Trouve le premier mois où le montant mensuel B_n dépasse A_n .
3. Compare les montants cumulés sur les six premiers mois.
4. Trouve le premier nombre de mois pour lequel le cumul du scénario B dépasse celui du scénario A. Distingue cette réponse de celle de la question 2.
5. À partir du rang 5, explique pourquoi l'écart $B_n - A_n$ augmente.

Correction 32

III • CORRECTIONS

Bien lire les indices

Le premier contrôle consiste à remplacer exactement ce qui est demandé.



SAVOIR-FAIRE Le fil à reproduire au contrôle

Note le premier rang avant tout calcul. Indique ensuite si la suite est explicite ou définie par récurrence, puis compte les passages ou les termes au lieu de les deviner. Pour une variation, étudie une différence – ou un quotient seulement après avoir justifié son signe. Pour un seuil, vérifie toujours le rang annoncé et le rang précédent.

1 Le rang n'est pas la place

Énoncé

1. Les cinq premiers rangs sont 0, 1, 2, 3, 4. On remplace n dans toute l'expression :

$$u_0 = 1,$$

$$u_1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

$$u_2 = 2 \times 4 - 6 + 1 = 3,$$

$$u_3 = 2 \times 9 - 9 + 1 = 10,$$

$$u_4 = 2 \times 16 - 12 + 1 = 21.$$

2. Le terme de rang 3 vaut donc 10. C'est aussi le quatrième terme, puisque la liste commence au rang 0.

3. Le dixième terme possède le rang 9. La place dans la liste est ici égale au rang augmenté de 1.



Vérifier. La liste commence par u_0 , et non par u_1 : l'ordre des termes doit rester 1, 0, 3, 10, 21.

2 Quatre expressions différentes

Énoncé

1. On distingue un changement de rang d'une opération sur la valeur :

$$u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1,$$

$$u_{2n} = 3(2n) - 2 = 6n - 2,$$

$$2u_n = 2(3n - 2) = 6n - 4,$$

$$u_n + 1 = 3n - 2 + 1 = 3n - 1.$$

2. Pour $n = 4$, ces quatre valeurs sont respectivement 13, 22, 20 et 11. On peut contrôler la première : $u_5 = 3 \times 5 - 2 = 13$.

3. Chercher un rang impose de résoudre puis de vérifier qu'il est entier et admissible :

$$3n - 2 = 40 \iff 3n = 42 \iff n = 14.$$

Le rang 14 appartient à $\mathbb{N}$, et $u_{14} = 42 - 2 = 40$. Il convient donc.



Le déclic. Dans u_{2n} , seul le rang est doublé. Dans $2u_n$, l'expression entière du terme est multipliée par 2.

III • CORRECTIONS

Respecter la récurrence

Chaque nouveau terme utilise le résultat précédent.

3 Conserver les valeurs exactes

Énoncé

1. On part de $u_0 = 5$ et on applique trois fois la même opération :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \times 5 + 3 = \frac{11}{2}, \\ u_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} + 3 = \frac{11}{4} + \frac{12}{4} = \frac{23}{4}, \\ u_3 &= \frac{1}{2} \times \frac{23}{4} + 3 = \frac{23}{8} + \frac{24}{8} = \frac{47}{8}. \end{aligned}$$

2. L'élève remplace le terme précédent par le rang. Or u_3 se calcule avec u_2 , pas avec le nombre 3. La relation est $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$; elle n'est pas une formule explicite $u_n = \frac{1}{2}n + 3$.

3. Les valeurs 5, 5,5, 5,75 et 5,875 suggèrent une croissance. Elles ne prouvent pas une propriété à tous les rangs. Il faudrait un raisonnement général à partir de la relation ou d'une formule explicite.

4 Une addition qui dépend du rang

Énoncé

1. Le premier rang est 1. Pour chaque passage, le rang utilisé est celui du terme de départ :

$$\begin{aligned} v_1 &= 7, \\ v_2 &= v_1 + 2 \times 1 = 9, \\ v_3 &= v_2 + 2 \times 2 = 13, \\ v_4 &= v_3 + 2 \times 3 = 19, \\ v_5 &= v_4 + 2 \times 4 = 27. \end{aligned}$$

2. De v_1 à v_5 , il y a $5 - 1 = 4$ passages. La liste comporte cinq termes.

3. Les différences sont 2, 4, 6, 8, et plus généralement $v_{n+1} - v_n = 2n$. Elles ne sont pas constantes : la suite n'est pas arithmétique.



Véifier. La suite est pourtant strictement croissante : $2n > 0$ pour tout $n \geq 1$. «Croissante» ne signifie pas «arithmétique».

III • CORRECTIONS

Prouver les variations

Une égalité entre deux termes mérite d'être signalée.

5 Des points sur une grille

Énoncé

1. Pour les rangs 0 à 6, les valeurs sont :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	8	5	4	5	8	13	20

On place les points $(0; 8)$, $(1; 5)$, $(2; 4)$, $(3; 5)$, $(4; 8)$, $(5; 13)$ et $(6; 20)$, comme dans le cours.

2. On développe la différence :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 4 - [(n)^2 + 4] = 2n + 1.$$

Elle est négative pour $n = 0, 1$ et strictement positive pour tout entier $n \geq 2$. Donc $u_0 > u_1 > u_2 < u_3 < u_4 < \dots$. La suite décroît strictement jusqu'au rang 2, puis croît strictement à partir de ce rang. Son minimum est $u_2 = 4$.

3. La suite est définie seulement pour des rangs entiers. La parabole représenterait la fonction réelle $x \mapsto (x-2)^2 + 4$; elle contient aussi des points qui ne correspondent à aucun terme de la suite.

6 Deux rangs au même minimum

Énoncé

1. Les parenthèses conservent tous les signes :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 7(n+1) + 8 - (n^2 - 7n + 8) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 7n - 7 + 8 - n^2 + 7n - 8 \\ &= 2n - 6. \end{aligned}$$

2. Cette différence est négative pour $n = 0, 1, 2$, nulle pour $n = 3$, positive pour $n \geq 4$. Ainsi,

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 = u_4 < u_5 < u_6 < \dots$$

La suite est décroissante jusqu'au rang 4 (avec un palier), puis strictement croissante à partir du rang 4. Elle n'est pas monotone sur tout $\mathbb{N}$.

3. $u_3 = 9 - 21 + 8 = -4$ et $u_4 = 16 - 28 + 8 = -4$. Le minimum vaut -4 , atteint exactement aux rangs 3 et 4.

III • CORRECTIONS

Choisir une preuve adaptée

Un contre-exemple suffit pour réfuter une affirmation universelle.

7 Une fraction qui se simplifie

Énoncé

1. Comme $3n + 2 = 3(n + 1) - 1$ et $n + 1 \neq 0$,

$$u_n = 3 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Cette écriture simplifie la différence :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Les deux facteurs du dénominateur sont positifs pour $n \geq 0$: la suite est strictement croissante. De plus, on retire à 3 un nombre strictement positif ; ainsi $u_n < 3$.

3. Lorsque n grandit, $1/(n+1)$ se rapproche de 0. On conjecture que u_n tend vers 3, par valeurs inférieures.



Vérifier. La différence est strictement positive pour tout rang et $u_n < 3$: les deux conclusions portent sur tous les rangs, contrairement à une simple lecture de quelques valeurs.

8 Même raison, effets différents

Énoncé

Pour (a_n) , tous les termes sont strictement positifs et $a_{n+1}/a_n = 3/4 < 1$: elle est strictement décroissante. Pour (b_n) , on utilise plutôt la différence :

$$b_{n+1} - b_n = -5(3/4)^n(3/4 - 1) = \frac{5}{4}(3/4)^n > 0.$$

Elle est strictement croissante. Diviser une inégalité par $b_n < 0$ en inverserait le sens : le critère du cours pour les termes positifs ne s'applique pas directement. Enfin, $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/4$: on descend, puis on remonte. Cela suffit à prouver que (c_n) n'est pas monotone. Son quotient négatif ne se lit pas avec le critère réservé aux suites positives.

9 Trois valeurs ne font pas une preuve

Énoncé

Aux rangs 0, 1 et 2, le produit $n(n-1)(n-2)$ est nul. On a donc, pour chacune des deux suites, les valeurs 0, 1, 4. Mais $u_3 = 9$, tandis que $v_3 = 9 + 3 \times 2 \times 1 = 15$. Les suites sont différentes. L'affirmation est fausse : l'accord sur un nombre fini de termes ne garantit pas l'égalité pour tous les rangs.



Vérifier. Pour réfuter une égalité annoncée « pour tout n », un seul contre-exemple suffit. Ici le rang 3 joue exactement ce rôle.

III • CORRECTIONS

Utiliser une raison additive

Compte les passages entre les deux rangs donnés.

10 Passer sous zéro

Énoncé

1. Pour une suite arithmétique, $u_n = u_0 + nr$. Ici,

$$u_n = 14 - 3n, \quad u_7 = 14 - 21 = -7.$$

2. On cherche $u_n < 0$, donc

$$14 - 3n < 0 \iff 14 < 3n \iff n > \frac{14}{3}.$$

Le premier entier admissible est 5.

3. $u_4 = 2 > 0$ et $u_5 = -1 < 0$. La suite est strictement décroissante, car sa raison vaut -3 . Tous les rangs antérieurs à 5 donnent donc un terme positif : le premier rang est bien 5.

11 Deux termes éloignés

Énoncé

L'hypothèse « arithmétique » permet d'écrire $u_{11} = u_4 + (11 - 4)r$. Ainsi,

$$-9 = 19 + 7r \implies r = \frac{-28}{7} = -4.$$

Pour revenir du rang 4 au rang 0, on annule quatre passages :

$$u_0 = u_4 - 4r = 19 - 4(-4) = 35.$$

On dispose alors de la formule $u_n = 35 - 4n$, d'où

$$u_{20} = 35 - 80 = \boxed{-45}.$$



Vérifier. Au rang 4, on retrouve $35 - 16 = 19$. Au rang 11, on retrouve $35 - 44 = -9$. La formule vérifie les deux données.

Pourquoi la division par 7 ?

La différence entre les deux termes est -28 , répartie sur sept passages identiques. Diviser par le nombre de termes 8 serait une erreur : la raison décrit une variation par passage.

III • CORRECTIONS

Additionner une progression

Le dernier terme ne donne pas directement le total.

12 Un petit théâtre en gradins

Énoncé

1. s_n est le nombre de sièges de la rangée n , pour $1 \leq n \leq 16$. On a $s_1 = 18$ et $s_{n+1} = s_n + 4$:

$$s_n = 18 + 4(n - 1).$$

2. La dernière rangée comporte $s_{16} = 18 + 4 \times 15 = 78$ sièges.

3. La capacité totale est une somme de 16 termes arithmétiques :

$$T = 16 \times \frac{18 + 78}{2} = \boxed{768 \text{ sièges}}.$$

Le nombre moyen de sièges par rangée est $48 : 16 \times 48 = 768$ constitue un contrôle rapide.

13 Une somme à termes négatifs

Énoncé

La suite est arithmétique de raison -2 . On calcule les extrémités : $u_3 = 1$ et $u_{18} = -29$. Il y a $18 - 3 + 1 = 16$ termes, donc

$$S = 16 \times \frac{1 + (-29)}{2} = 8 \times (-28) = \boxed{-224}.$$

Après le premier terme 1, tous les termes sont négatifs : $-1, -3, \dots, -29$. Leur contribution négative dépasse largement 1 ; le signe final est cohérent.

14 Le nombre de termes est caché

Énoncé

Les termes augmentent de 5. En appelant k le nombre de passages depuis 9, on cherche :

$$9 + 5k = 84 \implies k = 15.$$

Le nombre 84 est donc obtenu après quinze passages ; il occupe la seizième place. La somme contient 16 termes :

$$S = 16 \times \frac{9 + 84}{2} = 8 \times 93 = \boxed{744}.$$



Véifier. Utiliser 15 au lieu de 16 oublierait une extrémité. La petite liste 9, 14 comporte déjà deux termes pour un seul passage.

III • CORRECTIONS

Multiplier, avancer, revenir

L'exposant traduit le nombre de passages.

15 Une raison négative

Énoncé

1. Chaque terme est le précédent multiplié par -2 :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = -6, \quad u_2 = 12, \quad u_3 = -24, \quad u_4 = 48.$$

Le terme de rang 7 vaut $u_7 = 3(-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$.

2. La formule explicite est $u_n = 3(-2)^n$, pour $n \geq 0$.

3. On a $u_1 < u_0$, mais $u_2 > u_1$. La suite n'est ni croissante ni décroissante. L'alternance des signes se poursuit car chaque multiplication par -2 change le signe du terme non nul.

 **Véifier.** Un exposant impair donne une puissance négative de -2 ; un exposant pair donne une puissance positive. Les parenthèses sont indispensables.

16 Remonter les multiplications

Énoncé

1. Deux passages relient v_0 à v_2 :

$$v_2 = v_0 \times 0,5^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{48}{0,25} = 192.$$

Remonter un passage de raison $0,5$ revient à diviser par $0,5$, donc à doubler.

2. Du rang 2 au rang 7, il y a cinq passages :

$$v_7 = v_2 \times 0,5^{7-2} = 48 \times \frac{1}{32} = \boxed{1,5}.$$

3. Le calcul $48 \times 0,5^7$ effectue sept passages à partir de v_2 . Il donne v_9 , et non v_7 . Sa valeur est $0,375$.

 **Le déclic.** Écris toujours « rang d'arrivée moins rang de départ » avant de remplacer l'exposant par un nombre.

III • CORRECTIONS

Déterminer une raison

Une puissance paire peut masquer le signe.

17 Une raison à déterminer

Énoncé

De w_3 à w_6 , il y a trois passages géométriques :

$$1458 = 54q^3 \implies q^3 = 27.$$

Le seul réel dont le cube vaut 27 est 3, donc $q = 3$. On remonte ensuite trois passages pour obtenir w_0 :

$$54 = w_0 \times 3^3 \implies w_0 = \frac{54}{27} = \boxed{2}.$$



Vérifier. La formule $w_n = 2 \times 3^n$ redonne $w_3 = 54$ et $w_6 = 2 \times 729 = 1458$.

18 Deux raisons possibles

Énoncé

1. Deux passages relient les rangs 1 et 3 :

$$3 = 12q^2 \implies q^2 = \frac{1}{4}.$$

Il y a donc deux possibilités : $q = 1/2$ ou $q = -1/2$. Une puissance paire efface le signe ; il faut conserver les deux réponses tant qu'aucune autre condition ne les départage.

2. Si tous les termes sont strictement positifs, $q = -1/2$ est impossible : w_2 vaudrait -6 . On retient donc $q = 1/2$.

3. Comme $w_1 = qw_0$,

$$w_0 = \frac{12}{1/2} = \boxed{24}.$$

La liste commence alors par 24, 12, 6, 3, ce qui satisfait toutes les données.

Ce que les deux exercices distinguent

Un cube positif impose ici une raison positive. Un carré positif ne fixe pas le signe de sa base. Le type de puissance obtenu dépend du nombre de passages, et non du rang de départ seul.

III • CORRECTIONS

Sommes géométriques

Le premier terme de la somme peut être différent du premier terme de la suite.

19 Une somme qui double

Énoncé

Les termes forment une progression de raison 2. Pour atteindre 384 à partir de 3, on résout $3 \times 2^k = 384$, soit $2^k = 128 = 2^7$. Il y a sept passages et donc huit termes. La somme vaut

$$S = 3 \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 3 \times 255 = \boxed{765}.$$

On peut vérifier en regroupant : $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = 765$.



Vérifier. Le nombre de termes est « nombre de passages + 1 ». La formule de somme utilise donc l'exposant 8, et non 7.

20 La somme commence au rang 2

Énoncé

Le premier terme de la somme vaut $u_2 = 160 \times 0,5^2 = 40$. Le dernier rang est 8, donc le nombre de termes est $8 - 2 + 1 = 7$.

$$S = 40 \frac{1 - 0,5^7}{1 - 0,5} = 80 \left(1 - \frac{1}{128} \right) = \boxed{79,375}.$$

L'addition directe confirme :

$$40 + 20 + 10 + 5 + 2,5 + 1,25 + 0,625 = 79,375.$$

Le résultat est exact : ce nombre décimal a une écriture finie. Il ne s'agit pas d'un arrondi.



Vérifier. La somme est supérieure à son premier terme 40, mais inférieure à 80. C'est cohérent : chaque nouveau terme est la moitié du précédent, et les sept termes n'atteignent pas encore la somme limite intuitive 80.

L'erreur à éviter

Utiliser 160 comme premier facteur additionnerait des termes à partir du rang 0. La formule commence au premier terme *présent dans la somme*, ici u_2 .

III • CORRECTIONS

Comparer des évolutions

L'évolution additive et l'évolution en pourcentage finissent par se séparer.

21 Réduire les déchets d'un atelier

Énoncé

1. $M_0 = 500$. Une baisse de 12 % conserve 88 % de la masse :

$$M_{n+1} = 0,88M_n.$$

2. La suite est géométrique, de raison 0,88 ; ainsi $M_n = 500 \times 0,88^n$. L'année 2029 correspond au rang 3 :

$$M_3 = 500 \times 0,88^3 = \boxed{340,736 \text{ kg}}.$$

C'est la prévision du modèle, soit environ 341 kg au kilogramme près.

3. $M_1 = 440$ et $M_2 = 387,2$. Les différences -60 puis $-52,8$ ne sont pas égales. Le pourcentage est constant, mais la baisse en kilogrammes ne l'est pas : la suite n'est pas arithmétique.

22 Deux scénarios de fréquentation

Énoncé

1. Le modèle A ajoute 40 chaque mois à une estimation initiale de 200. Le modèle B multiplie par 1,15, donc prévoit une hausse mensuelle de 15 %.
2. Un tableau suffit ici, à condition de comparer tous les rangs précédant le premier succès :

n	0	1	2	3	4	5
A_n	200	240	280	320	360	400
B_n	200	230	264,50	304,18	349,80	402,27

Les valeurs de B sont arrondies au centième pour l'affichage, après calcul sans arrondi intermédiaire. L'inégalité stricte $B_n > A_n$ apparaît pour la première fois au rang 5.

3. Le rang 0 étant le premier mois, le rang 5 est le **sixième mois**. Au rang précédent, $B_4 \simeq 349,80 < 360 = A_4$, tandis que $B_5 \simeq 402,27 > 400 = A_5$.



Vérifier. Au rang 0, les valeurs sont égales. L'égalité ne satisfait pas la demande « dépasse ».

III • CORRECTIONS

Respecter l'ordre des calculs

Une variable mise à jour trop tôt peut faire perdre une information.

23 L'ordre d'un versement

Énoncé

1. La hausse de 1 % multiplie par 1,01 ; le versement intervient ensuite :

$$u_{n+1} = 1,01u_n + 40.$$

Ainsi $u_1 = 1,01 \times 300 + 40 = 343$ €, puis

$$u_2 = 1,01 \times 343 + 40 = \boxed{386,43 \text{ €}}.$$

2. Si le versement précède la hausse, la relation devient

$$u_{n+1} = 1,01(u_n + 40) = 1,01u_n + 40,40.$$

3. Pour un même montant de départ, cette seconde opération produit 0,40 € de plus : les 40 € versés bénéficient eux aussi de la hausse de 1 %. Les deux scénarios n'ont donc pas la même récurrence.

24 Deux termes pour calculer le suivant

Énoncé

Les termes sont $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$: à chaque fois, on additionne les deux termes précédents. Un programme qui calcule F_N , y compris pour $N = 0$, est :

```
N = 7
a = 0
b = 1
for k in range(N):
    suivant = a + b
    a = b
    b = suivant
print(a)
```

Avant un tour, $a = F_k$ et $b = F_{k+1}$. On calcule d'abord $F_{k+2} = a + b$, puis on déplace la paire : a devient F_{k+1} et b devient F_{k+2} . Si l'on faisait $a = b$ avant de calculer la somme, on perdrait l'ancien a ; $a + b$ vaudrait alors deux fois l'ancien b .

III • CORRECTIONS

S'arrêter au premier rang

Le dernier échec et le premier succès encadrent le seuil.

25 Atteindre ou dépasser

Énoncé

Pour le premier seuil,

$$125 + 18n \geq 500 \iff n \geq \frac{375}{18} \simeq 20,83.$$

Le premier entier est 21. On vérifie $u_{20} = 485 < 500$ et $u_{21} = 503 \geq 500$. Pour le second seuil,

$$125 + 18n > 503 \iff 18n > 378 \iff n > 21.$$

Le premier rang est donc 22, avec $u_{22} = 521 > 503$. Le terme $u_{21} = 503$ est exclu par l'inégalité stricte. La suite est strictement croissante, car sa raison vaut $18 > 0$: les contrôles au rang précédent suffisent après la résolution des inégalités.

26 Un seuil géométrique

Énoncé

On cherche $v_n < 100$; la boucle continue donc tant que $v \geq 100$.

```
n = 0
v = 800
while v >= 100:
    v = 0.8 * v
    n = n + 1
print(n, v)
```

Elle donne $n = 10$. Les valeurs autour du seuil sont

$$v_9 = 107,3741824, \quad v_{10} = 85,89934592.$$

Au centième : $v_9 \simeq 107,37$ et $v_{10} \simeq 85,90$. Le terme de rang 9 reste au-dessus de 100, celui de rang 10 est en dessous. Comme $v_n > 0$ et que la raison 0,8 est inférieure à 1, la suite est strictement décroissante : 10 est bien le premier rang.



Vérifier. Le compteur commence à 0, comme le terme initial. Il augmente exactement une fois par multiplication.

III • CORRECTIONS

Contrôler une boucle

Le nombre de tours doit correspondre au nombre de passages.

27 Une boucle trop courte

Énoncé

En Python, `range(1, 10)` fournit les neuf entiers de 1 à 9. La boucle ajoute donc 3 neuf fois : elle calcule $u_9 = 2 + 9 \times 3 = 29$. Pour calculer u_{10} , il faut dix passages :

```
u = 2
for k in range(10):
    u = u + 3
print(u)
```

La suite est arithmétique de raison 3, donc $u_n = 2 + 3n$. Le contrôle explicite donne $u_{10} = 2 + 30 = \boxed{32}$.

28 Accumuler au bon moment

Énoncé

On initialise la somme avec le terme $u_0 = 10$, puis on ajoute les cinq nouveaux termes u_1 à u_5 :

```
u = 10
S = u
for k in range(5):
    u = 1.2 * u
    S = S + u
print(S)
```

La formule géométrique contient six termes, de premier terme 10 et de raison 1,2 :

$$S = 10 \frac{1,2^6 - 1}{1,2 - 1} = \boxed{99,2992}.$$

On retrouve l'addition $10 + 12 + 14,4 + 17,28 + 20,736 + 24,8832$. Initialiser S à 0 tout en gardant cette boucle oublierait u_0 . Inversement, ajouter u_0 avant la boucle puis le réajouter au premier tour le compterait deux fois.



Véifier. Un affichage informatique peut comporter une très petite erreur de représentation des décimaux. La formule donne ici la valeur exacte 99,2992.

III • CORRECTIONS

Additionner ce qui est produit

Un total doit correspondre exactement aux objets demandés.

29 Entourer un carré

Énoncé

1 et 2. La bordure est le carré extérieur auquel on enlève le carré intérieur :

$$b_n = (n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4.$$

Donc $b_{n+1} - b_n = 4$: la suite est arithmétique, de raison 4 et de premier terme $b_1 = 8$.

3. Le dernier motif utilise $b_{12} = 52$ carreaux pour sa bordure. Pour les douze motifs,

$$B = 12 \times \frac{8 + 52}{2} = \boxed{360 \text{ carreaux}}.$$

4. Additionner $(n + 2)^2$ compterait aussi les carreaux intérieurs. On demande uniquement les bordures ; la soustraction est donc indispensable.

30 Préparer des badges pour un événement

Énoncé

1. La production quotidienne est arithmétique de raison 3 :

$$d_n = 18 + 3(n - 1) = 3n + 15.$$

2. Le cumul des N premiers jours vaut

$$T_N = N \frac{d_1 + d_N}{2} = N \frac{18 + 3N + 15}{2} = \frac{N(3N + 33)}{2}.$$

3. En calculant près du seuil, $T_{11} = 363$ et $T_{12} = 414$. Les productions journalières sont positives, donc le cumul est strictement croissant. L'atelier dispose d'au moins 400 badges pour la première fois à la fin du douzième jour.

4. Ce jour-là, $d_{12} = 51 \leq 54$: la capacité est respectée. Pour connaître la dernière journée compatible,

$$3n + 15 \leq 54 \iff n \leq 13.$$

La progression est possible jusqu'au jour 13, où l'on produit 54 badges. Au jour 14, elle demanderait 57 badges et devrait être modifiée.

III • CORRECTIONS

Changer de repère

L'écart à une valeur fixe possède une évolution plus simple.

31 Un écart qui se réduit

Énoncé

1. La valeur fixe vérifie

$$\ell = 0,8\ell + 6 \iff 0,2\ell = 6 \iff \ell = 30.$$

2. On pose $v_n = u_n - 30$. L'objectif est de faire disparaître le terme constant dans la relation de passage :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 30 \\ &= 0,8u_n + 6 - 30 \\ &= 0,8(v_n + 30) - 24 = 0,8v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8, avec $v_0 = 10 - 30 = -20$.

3. On obtient $v_n = -20 \times 0,8^n$, puis on revient à (u_n) :

$$u_n = 30 - 20 \times 0,8^n.$$

Pour établir les variations sans ambiguïté de signe,

$$u_{n+1} - u_n = -20 \times 0,8^n(0,8 - 1) = 4 \times 0,8^n > 0.$$

La suite est strictement croissante.

4. Puisque $0,8^n$ se rapproche de 0, on conjecture que u_n tend vers 30, par valeurs inférieures.

5. Un tableau ou une boucle de seuil donne :

$$u_{10} = 27,852516352 < 28, \quad u_{11} = 28,2820130816 \geq 28.$$

La croissance stricte garantit que tous les rangs antérieurs à 10 donnent des valeurs encore plus petites. Le premier rang demandé est donc 11.



Vérifier. La formule donne $u_0 = 30 - 20 = 10$ et $u_1 = 30 - 16 = 14$, comme la récurrence $0,8 \times 10 + 6$.

III • CORRECTIONS

Distinguer un mois et un cumul

Un scénario peut dépasser l'autre sur un mois sans avoir rattrapé son retard total.

32 Choisir une collecte associative

Énoncé

- (A_n) est arithmétique de raison 10, avec $A_0 = 60$. (B_n) est géométrique de raison 1,25, avec $B_0 = 40$.
- Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, les valeurs de B sont 40, 50, 62,5, 78,125, 97,65625, toutes inférieures aux valeurs de A : 60, 70, 80, 90, 100. Au rang 5, $B_5 = 122,0703125 > A_5 = 110$. B dépasse donc A pour la première fois au **sixième mois**.
- Les six premiers mois correspondent aux rangs 0 à 5 :

$$S_A(6) = 6 \frac{60 + 110}{2} = 510,$$

$$S_B(6) = 40 \frac{1,25^6 - 1}{1,25 - 1} = 450,3515625.$$

Le cumul de A vaut 510 €, contre environ 450,35 € pour B. A conserve donc l'avantage sur cette période.

- Pour N mois, les formules sont

$$S_A(N) = \frac{N[120 + 10(N - 1)]}{2}, \quad S_B(N) = 160(1,25^N - 1).$$

Au bout de sept mois : $S_A(7) = 630$ et $S_B(7) \simeq 602,94$. Au bout de huit mois : $S_A(8) = 760$ et $S_B(8) \simeq 793,67$. Avant le sixième mois, chaque montant B est inférieur au montant A, donc son cumul aussi. Les contrôles à six et sept mois montrent que le rattrapage n'a pas encore lieu. Le premier cumul supérieur est donc obtenu au bout de **huit mois**.

- Posons $D_n = B_n - A_n$. Alors

$$D_{n+1} - D_n = 0,25B_n - 10.$$

Pour $n \geq 5$, $B_n \geq B_5 > 40$, donc $0,25B_n - 10 > 0$. L'écart mensuel augmente à partir de ce rang. Le dépassement mensuel au sixième mois se poursuit, mais le retard cumulé ne disparaît qu'au huitième.

BILAN

Ce que tu dois savoir refaire

Les formules restent liées à leurs conditions.

Arithmétique	$u_{n+1} = u_n + r; u_n = u_p + (n - p)r.$
Géométrie	$u_{n+1} = qu_n$; si $q \neq 0, u_n = u_p q^{n-p}$. Traiter $q = 0$ directement.
Somme arithmétique	Nombre de termes $\times$ moyenne des deux extrémités.
Somme géométrique	Pour N termes de premier terme a : $a(1 - q^N)/(1 - q)$ si $q \neq 1$; Na si $q = 1$.
Variations	Signe de $u_{n+1} - u_n$; quotient comparé à 1 après justification de $u_n > 0$.
Seuil	Identifier le sens de l'inégalité et contrôler le rang précédent.

Ton prochain entraînement

- Si les indices posent problème : reprends les exercices 1 à 4 et 16.
- Si les signes te font hésiter : reprends 6, 7, 8 et 15.
- Si une somme est difficile : écris « premier / dernier / nombre », puis reprends 12 à 14 et 19 à 20.
- Si le modèle est mal choisi : reprends 21 à 23, puis 30 et 32.
- Si le programme donne un rang décalé : fais fonctionner 26 à 28 à la main sur deux tours.



Le déclic. Un exercice est acquis lorsque tu peux expliquer le choix de la méthode, refaire le calcul sans aide et interpréter le résultat. Reviens quelques jours plus tard sur un exercice où tu avais hésité.

Conditions d'utilisation

© 2026 Rémi Piau – Alors on science !

L'utilisation en classe, la projection, l'impression et la photocopie, intégrales ou partielles, sont autorisées pour un usage personnel ou pour les élèves directement accompagnés, sans vente des copies et en conservant le nom de l'auteur, la marque et les présentes mentions.

La diffusion numérique à des tiers, la mise en ligne, la publication de versions modifiées et l'exploitation commerciale du document ou de ses extraits nécessitent l'autorisation écrite préalable de Rémi Piau. Toute commercialisation est réservée à Alors on science !, sauf autorisation écrite.

Tous les autres droits sont réservés, sous réserve des exceptions prévues par la loi.