

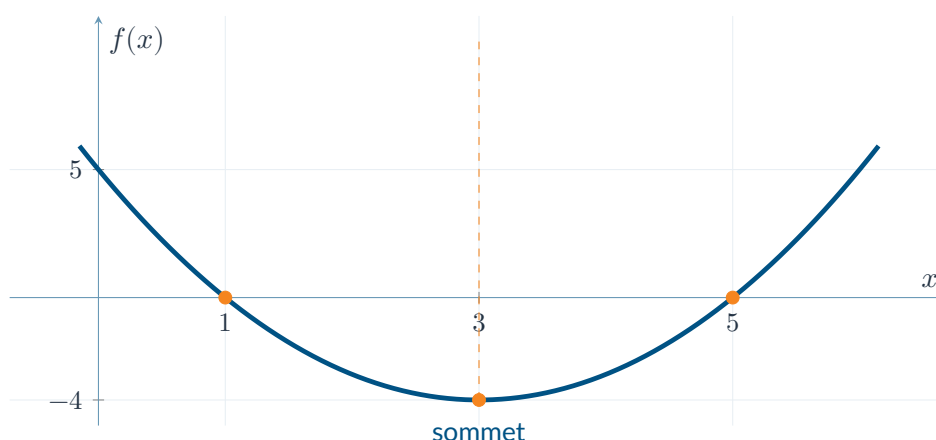


Alors on
Science!

Polynômes du second degré

Trois formes. Une même fonction.

Le bon outil au bon moment.



- I **Cours et savoir-faire** Comprendre les résultats et apprendre à choisir une méthode.
- II **Exercices** 32 exercices, des automatismes aux problèmes.
- III **Corrections détaillées** Retrouver le raisonnement, pas seulement le résultat.

MODE D'EMPLOI

Un chapitre pour travailler seul

Lire avec un crayon, chercher avant de regarder, reprendre ce qui résiste.

Repères : cours p. 3; exercices p. 24; corrections p. 35.

Ton parcours

Pour apprendre	Lis le cours et refais les exemples en cachant la solution. Les petites questions « À toi de jouer » permettent un premier contrôle.
Pour t'entraîner	Les exercices 1 à 8 consolident les bases; 9 à 20 font choisir une méthode; 21 à 30 demandent de relier plusieurs idées; 31 et 32 sont des approfondissements.
Pour progresser	Avant de lire la correction, note l'étape où tu bloques. Après lecture, refais cette étape, puis l'exercice entier quelques jours plus tard.

Des repères qui ont chacun une fonction



DÉFINITION Nommer

Un cadre orange introduit une notion et le sens de sa notation.



PROPRIÉTÉ Retenir

Un cadre bleu énonce un résultat, avec ses conditions de validité.



SAVOIR-FAIRE Agir

La cible orbitale annonce une démarche : ce que l'on cherche, pourquoi on choisit cet outil, puis comment on l'applique.



Le déclic. L'ampoule éclaire un choix ou rappelle une règle au moment où elle devient utile.



Vérifier. La coche propose une vérification qui peut détecter une erreur. Elle ne remplace pas une démonstration demandée.



POINT DE VIGILANCE Prendre le temps

Le triangle bicolore signale une confusion précise, sans multiplier les avertissements.

Matériel. Un cahier pour rédiger, une règle pour les tableaux et les figures. Cherche d'abord les valeurs exactes. Une calculatrice peut ensuite aider à contrôler une approximation.

I • COURS ET SAVOIR-FAIRE

Avant de commencer

Quatre réflexes de calcul qui vont réellement servir.

1. Développer un carré : le terme du milieu compte

Pour tous réels u et v ,

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2, \quad (u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2.$$

Ainsi $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, et non $x^2 + 9$. Le terme $-6x$ provient de deux produits : $x \times (-3)$ et $(-3) \times x$.

2. Factoriser : transformer une somme en produit

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4), \quad x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5).$$

Dans la première égalité, $3x$ est commun aux deux termes. Dans la seconde, on reconnaît $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

3. Résoudre un produit nul et une équation de carré

Un produit de réels est nul si et seulement si au moins un facteur est nul :

$$(2x - 1)(x + 4) = 0 \iff 2x - 1 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0.$$

Les solutions sont donc $\frac{1}{2}$ et -4 . Pour un carré :

$$x^2 = 9 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Un carré réel est toujours positif ou nul : $x^2 = -9$ n'a aucune solution réelle.

4. Remplacer un nombre négatif avec des parenthèses

Pour $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, on obtient

$$f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15.$$

Dans $(-2)^2$, c'est tout le nombre -2 qui est élevé au carré.



À TOI DE JOUER Diagnostic express

Développe $(x + 2)^2$; factorise $5x^2 - 10x$; résous $x^2 = 7$; calcule $g(-1)$ pour $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Réponse pour te vérifier : $x^2 + 4x + 4$; $5x(x - 2)$; $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$; -7 . Si une réponse t'échappe, reprends la règle correspondante ci-dessus.

I • COMPRENDRE

Reconnaître le second degré

Avant de calculer, identifie l'objet que tu étudies.



DÉFINITION Fonction polynôme du second degré

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré lorsqu'elle s'écrit

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Les nombres a , b et c sont ses coefficients. Cette écriture est sa **forme développée réduite**. Le coefficient de x^2 doit être non nul.

Pour $f(x) = -2x^2 + 5x - 7$, on lit $a = -2$, $b = 5$, $c = -7$. Le signe fait partie du coefficient. Pour $g(x) = 4x^2 - 9$, on a $a = 4$, $b = 0$, $c = -9$: le terme en x peut manquer.

Une expression peut cacher sa nature

La fonction $h(x) = (x + 1)^2 - x^2$ semble contenir du second degré. Pourtant,

$$h(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$$

C'est une fonction affine. On classe une expression **après simplification**, pas à son apparence.



DÉFINITION Racine et parabole

Une **racine** de f est un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$. C'est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

La courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**. Une racine x_0 correspond au point $(x_0; 0)$ où cette courbe rencontre l'axe des abscisses.



SAVOIR-FAIRE Vérifier qu'un nombre est une racine

Pour $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, testons 2 :

$$f(2) = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 8 - 10 + 2 = 0.$$

Donc 2 est une racine. En revanche $f(1) = 2 - 5 + 2 = -1 \neq 0$: 1 n'en est pas une.



À TOI DE JOUER Sans deviner

Dans $-x^2 + 6$, quels sont a , b , c ? Le nombre $\sqrt{6}$ est-il une racine ?

Réponse pour te vérifier : $a = -1$, $b = 0$, $c = 6$; oui, car $-(\sqrt{6})^2 + 6 = 0$.

I • CHOISIR

Trois formes, trois accès

Une expression bien choisie peut éviter beaucoup de calculs.

Considérons une même fonction :

$$\underbrace{x^2 - 6x + 5}_{\text{développée}} = \underbrace{(x - 1)(x - 5)}_{\text{factorisée}} = \underbrace{(x - 3)^2 - 4}_{\text{canonique}}.$$

Ces expressions sont égales **pour tout réel** x . Vérifions les deux transformations :

$$\begin{aligned}(x - 1)(x - 5) &= x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5, \\ (x - 3)^2 - 4 &= x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5.\end{aligned}$$

Question	Forme utile	Ce qu'elle révèle
Calculer $f(0)$	$x^2 - 6x + 5$	$f(0) = 5$ immédiatement.
Résoudre $f(x) = 0$	$(x - 1)(x - 5)$	Les racines sont 1 et 5.
Trouver le minimum	$(x - 3)^2 - 4$	Le carré vaut au moins 0 : $f(x) \geq -4$, avec égalité en 3.

Lire la forme canonique



DÉFINITION Forme canonique

Toute fonction du second degré admet une écriture

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad a \neq 0.$$

Le point $S(\alpha; \beta)$ est le **sommet** de sa parabole. Sa droite de symétrie a pour équation $x = \alpha$.

Dans $-2(x + 1)^2 + 8$, on doit lire $(x - (-1))^2$: le sommet est $S(-1; 8)$, et non $S(1; 8)$.



Le déclic. Ne développe pas par réflexe. Si la question porte sur une annulation, un sommet ou un extremum, regarde d'abord ce que la forme donnée permet déjà de lire.



À TOI DE JOUER Choisir avant d'agir

Pour $f(x) = (x - 3)^2 - 4$, quelle forme précédente utilises-tu pour calculer $f(0)$? Pour résoudre $f(x) = -4$?

Réponse pour te vérifier : Développée : $f(0) = 5$. Canonique : $(x - 3)^2 = 0$, donc $x = 3$.

I • SAVOIR-FAIRE 01

Faire apparaître un carré

Repérer ce que le carré ajoute, puis le compenser.



SAVOIR-FAIRE Passer à la forme canonique dans un cas simple

Écrivons $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$ sous forme canonique.

1 • Isoler le coefficient de x^2 . On factorise 2 dans les deux premiers termes :

$$f(x) = 2(x^2 - 6x) + 7.$$

2 • Trouver le bon carré. Le terme $-6x$ doit être le terme croisé $-2 \times 3 \times x$. On essaie donc $(x - 3)^2$.

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9.$$

Le carré contient les deux termes voulus, mais aussi 9 en trop. On le retire :

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9.$$

3 • Remplacer toute l'expression. La compensation reste dans le crochet :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2[(x - 3)^2 - 9] + 7 \\ &= 2(x - 3)^2 - 18 + 7 = \boxed{2(x - 3)^2 - 11}. \end{aligned}$$



Véifier. En développant $2(x - 3)^2 - 11$, on retrouve $2x^2 - 12x + 18 - 11 = 2x^2 - 12x + 7$.



Le déclic. Le programme demande de savoir compléter le carré dans des cas simples comme ceux de cette page. Il n'est pas utile de mémoriser une transformation générale compliquée : lorsque la structure n'apparaît pas proprement, choisis une autre forme ou un autre outil.



POINT DE VIGILANCE Le coefficient extérieur agit aussi

Écrire $2[(x - 3)^2 - 9] = 2(x - 3)^2 - 9$ est faux : le 2 multiplie également le terme -9 .

Et si le coefficient dominant est négatif?

$$-x^2 + 4x + 1 = -[x^2 - 4x] + 1 = -[(x - 2)^2 - 4] + 1 = -(x - 2)^2 + 5.$$

Le signe moins devant le crochet change aussi le signe de -4 .



À TOI DE JOUER Même idée, nouvelles données

Mets $x^2 + 8x + 3$ puis $3x^2 - 6x + 5$ sous forme canonique.

Réponse pour te vérifier : $(x + 4)^2 - 13; 3[(x - 1)^2 - 1] + 5 = 3(x - 1)^2 + 2$.

I • COMPRENDRE

Sommet, extremum et variations

Tout part du fait qu'un carré est positif ou nul.



PROPRIÉTÉ Lire un extremum

Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Si $a > 0$, alors $f(x) \geq \beta$: son **minimum** est β , atteint pour $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, alors $f(x) \leq \beta$: son **maximum** est β , atteint pour $x = \alpha$.

Pourquoi? Le carré $(x - \alpha)^2$ est positif ou nul, et vaut 0 uniquement en α . Multiplier par un nombre négatif renverse l'inégalité. Ajouter β donne les deux conclusions.

Comprendre les variations sans dériver

Quand x se rapproche de α , sa distance à α diminue : $(x - \alpha)^2$ diminue. Quand x s'en éloigne, ce carré augmente. Ainsi :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$ si $a > 0$		β	
$f(x)$ si $a < 0$		β	



SAVOIR-FAIRE Distinguer valeur et lieu de l'extremum

Pour $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$, on a $a = -2 < 0$ et $\alpha = -1$. Donc f croît sur $] -\infty; -1]$, puis décroît sur $[-1; +\infty[$. Son maximum est 8, atteint pour $x = -1$.



POINT DE VIGILANCE Le domaine du problème compte

Sur $[0; 3]$, cette même fonction est seulement décroissante. Son maximum y est $f(0) = 6$; le sommet d'abscisse -1 n'appartient pas à cet intervalle.



À TOI DE JOUER Une borne expliquée

Justifie $3(x - 2)^2 + 1 \geq 1$. Quand a-t-on égalité?

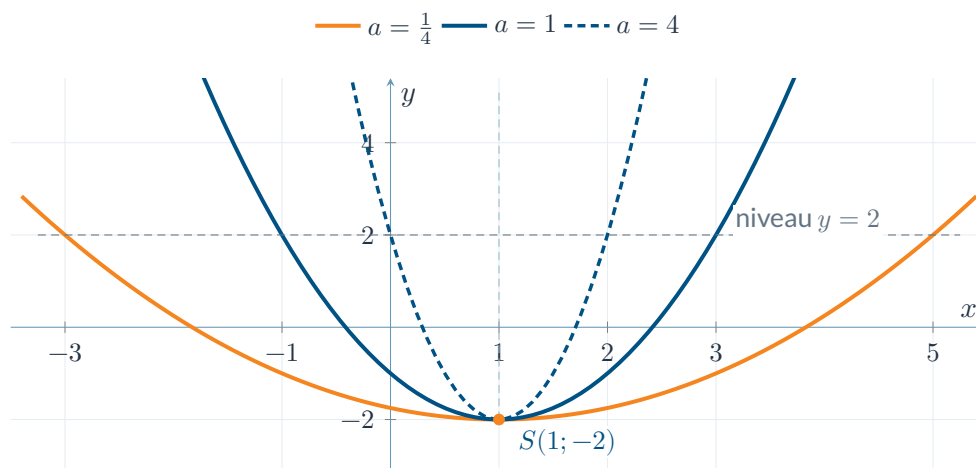
Réponse pour te vérifier : Le carré est ≥ 0 , donc son triple aussi. L'égalité exige $x - 2 = 0$, soit $x = 2$.

I • LIRE UNE PARABOLE

Le rôle de a dans l'ouverture

Comparer dans le même repère, avec le même sommet et les mêmes échelles.

Dans $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, le **signe** de a fixe le sens d'ouverture. Sa **valeur absolue** $|a|$ règle le resserrement autour de l'axe $x = \alpha$.



Ces trois courbes ont pour équations $y = a(x - 1)^2 - 2$. Pour atteindre le même niveau $y = 2$, on doit monter de 4 au-dessus du sommet :

$$a(x - 1)^2 = 4 \implies |x - 1| = \sqrt{\frac{4}{a}} \quad (a > 0).$$

Coefficient a	$\frac{1}{4}$	1	4
Distance à l'axe au niveau $y = 2$	4	2	1
Écart entre les deux branches	8	4	2



PROPRIÉTÉ Plus $|a|$ est grand, plus la parabole est ressermée

À sommet fixé et dans le même repère, un grand $|a|$ fait varier la hauteur plus vite lorsqu'on s'éloigne de l'axe. Pour atteindre un même écart vertical au sommet, on s'éloigne donc moins horizontalement. Un petit $|a|$ donne une parabole plus évasée.

Si l'on remplace a par $-a$, la courbe se réfléchit par rapport à la droite $y = \beta$: même resserrement, sens d'ouverture opposé. Ainsi $a = -4$ donne une parabole plus ressermée que $a = -1$, car $|-4| > |-1|$.



À TOI DE JOUER Comparer sans tracer

Avec le même sommet, laquelle est la plus évasée : $a = -0,2$ ou $a = -3$? Et que devient la fonction si $a = 0$?

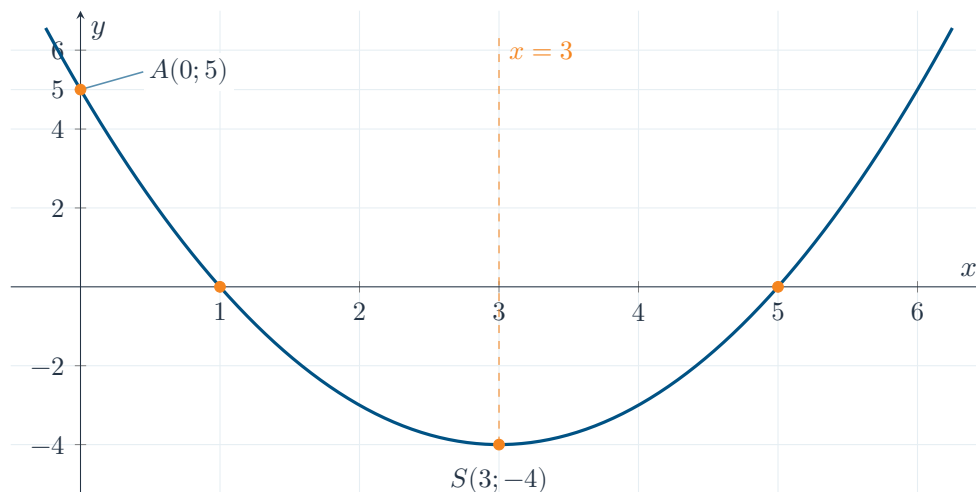
Réponse pour te vérifier : $a = -0,2$, car sa valeur absolue est plus petite. Si $a = 0$, il reste $f(x) = \beta$: la courbe est une droite horizontale, plus une parabole.

I • REPRÉSENTER

Relier la courbe aux calculs

Un dessin éclaire le résultat; l'algèbre en établit les valeurs exactes.

Reprenons $f(x) = (x - 3)^2 - 4 = (x - 1)(x - 5) = x^2 - 6x + 5$.



- Les racines 1 et 5 donnent les intersections avec l'axe des abscisses.
- $f(0) = 5$ donne l'intersection avec l'axe des ordonnées.
- Le sommet $S(3; -4)$ correspond au minimum; l'axe est $x = 3$.
- Les points d'abscisses $3 - h$ et $3 + h$ ont la même ordonnée : $f(3 - h) = h^2 - 4 = f(3 + h)$.



Le déclic. Pour construire un croquis, place d'abord le sommet, l'axe de symétrie et quelques points exacts. Relie-les en respectant les variations; une parabole n'est pas une ligne brisée.



À TOI DE JOUER Signe et position

Pour quelles abscisses cette courbe est-elle sous l'axe horizontal? Que signifie cette phrase pour $f(x)$?

Réponse pour te vérifier : Pour $1 < x < 5$; cela signifie $f(x) < 0$. Aux bornes 1 et 5, la valeur est nulle.

I • LIRE UNE PARABOLE

Le sommet annonce les racines

Le sens d'ouverture et la hauteur du sommet suffisent pour compter les intersections.

Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$, et son sommet $S(\alpha; \beta)$. Une racine correspond à une intersection avec l'axe horizontal $y = 0$.



SAVOIR-FAIRE Trois questions à poser au dessin

1 • Dans quel sens la parabole s'ouvre-t-elle ? Si $a > 0$, elle s'ouvre vers le haut et le sommet est son point le plus bas. Si $a < 0$, elle s'ouvre vers le bas et le sommet est son point le plus haut.

2 • Où se trouve le sommet par rapport à l'axe horizontal ? C'est le signe de β qui le dit : en dessous si $\beta < 0$, sur l'axe si $\beta = 0$, au-dessus si $\beta > 0$.

3 • Les branches rencontrent-elles l'axe ? Un minimum négatif avec deux branches qui montent donne deux intersections. Un minimum positif laisse toute la courbe au-dessus. Pour un maximum, on raisonne en renversant le dessin.

Sommet	$a > 0$: minimum	$a < 0$: maximum
$\beta < 0$: sous l'axe	Deux racines distinctes.	Aucune racine réelle.
$\beta = 0$: sur l'axe	Une racine double : α .	Une racine double : α .
$\beta > 0$: au-dessus	Aucune racine réelle.	Deux racines distinctes.

Ce que dit l'abscisse du sommet

α place l'axe de symétrie ; elle ne décide pas du nombre de racines. Lorsqu'il y en a deux, on les range $x_1 < x_2$ et

$$x_1 < \alpha < x_2, \quad \alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Elles sont à la même distance du sommet horizontalement. Déplacer la parabole vers la droite ou vers la gauche déplace les racines sans changer leur nombre.

Un exemple avant tout discriminant

Si $a = -2$ et $S(3; 8)$, le maximum est positif et les branches descendent : il y a deux racines. La forme $f(x) = -2(x - 3)^2 + 8$ donne

$$f(x) = 0 \iff (x - 3)^2 = 4 \iff x = 1 \text{ ou } x = 5.$$

Les racines sont donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$. Si le sommet devient $S(3; -8)$ avec le même a , toute la parabole reste sous l'axe : aucune racine réelle.



À TOI DE JOUER Lis le sommet

Une parabole a $a = 3$ et $S(-2; 5)$. Combien de racines ? Et avec $S(-2; 0)$? Avec $S(-2; -5)$?

Réponse pour te vérifier : Aucune ; une racine double -2 ; deux racines distinctes, symétriques autour de -2 .

I • SAVOIR-FAIRE 02

Résoudre sans tout déployer

Le discriminant est utile, mais une structure simple l'est parfois davantage.

Un facteur commun

$$3x^2 - 12x = 0 \iff 3x(x - 4) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4.$$



POINT DE VIGILANCE Ne pas diviser par l'inconnue

Diviser directement par x suppose $x \neq 0$ et peut faire perdre la solution 0. Factoriser conserve tous les cas.

Une différence de carrés

$$4x^2 - 9 = 0 \iff (2x - 3)(2x + 3) = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.$$

Un carré déjà isolé

$$\begin{aligned} 2(x - 1)^2 - 18 &= 0 \iff (x - 1)^2 = 9 \\ &\iff x - 1 = 3 \text{ ou } x - 1 = -3 \\ &\iff x = 4 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$

On commence par isoler le carré; on prend ensuite **les deux signes**.

Une racine qui se voit

Pour $f(x) = x^2 - 5x + 4$, on remarque $f(1) = 1 - 5 + 4 = 0$. Cherchons k tel que

$$(x - 1)(x - k) = x^2 - (k + 1)x + k.$$

Le terme constant impose $k = 4$, et le coefficient de x devient bien -5 . Ainsi $f(x) = (x - 1)(x - 4)$: les racines sont 1 et 4.



Véifier. Retrouver une racine est un début. Une factorisation vérifiée explique aussi pourquoi il n'en existe pas d'autres.



À TOI DE JOUER Choisis ton outil

Résous $5x^2 + 10x = 0$ puis $(x + 2)^2 = 5$.

Réponse pour te vérifier : $5x(x + 2) = 0$, donc $\{-2; 0\}$; puis $x = -2 - \sqrt{5}$ ou $x = -2 + \sqrt{5}$.

I • SAVOIR-FAIRE 03

Utiliser somme et produit

Retrouver des racines simples en reconnaissant deux nombres.



PROPRIÉTÉ Somme et produit des racines

Si $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$, alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces relations valent aussi lorsque les deux racines sont confondues.

Démonstration. Développons sans sauter le terme croisé :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2.$$

Les coefficients des deux écritures sont égaux : $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1 x_2$. La division par a est permise car $a \neq 0$.



SAVOIR-FAIRE Factoriser un trinôme unitaire

Pour $f(x) = x^2 - 7x + 10$, cherchons deux nombres de somme 7 et de produit 10. Les couples entiers positifs à tester sont (1; 10) et (2; 5). Seul le second a pour somme 7.

On propose donc $f(x) = (x - 2)(x - 5)$ et on le vérifie en développant :

$$(x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10.$$

Les signes donnent déjà une information

Pour $x^2 + x - 6$, le produit cherché est -6 : les deux nombres sont de signes opposés. Leur somme est -1 : -3 et 2 conviennent. D'où

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2).$$



POINT DE VIGILANCE Ne pas chercher indéfiniment

Si aucun couple simple n'apparaît, cela ne prouve pas qu'il n'existe aucune racine. Les racines peuvent être irrationnelles. On dispose alors du discriminant.



À TOI DE JOUER Reconnaître et contrôler

Factorise $x^2 - 8x + 15$ puis $2x^2 - 10x + 12$.

Réponse pour te vérifier : $(x - 3)(x - 5)$; $2(x^2 - 5x + 6) = 2(x - 2)(x - 3)$. Le facteur 2 doit rester.

I • DÉMONTRER

D'où vient le discriminant ?

Ramener une équation du second degré à une équation de carré.

Soit $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$. L'identité suivante se vérifie par développement :

$$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 4a(ax^2 + bx + c).$$

En effet, le membre de gauche vaut $4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac$, puis on factorise $4a$.



DÉFINITION Discriminant

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du trinôme. Puisque $4a \neq 0$, l'identité précédente donne l'équivalence

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff (2ax + b)^2 = \Delta.$$

Trois possibilités, comme pour $X^2 = k$

Si $\Delta < 0$: un carré ne peut pas être négatif. Il n'existe aucune solution réelle.

Si $\Delta = 0$: $2ax + b = 0$, d'où $x = -\frac{b}{2a}$. Il y a une seule solution réelle, appelée racine double.

Si $\Delta > 0$: $2ax + b = -\sqrt{\Delta}$ ou $2ax + b = \sqrt{\Delta}$. En soustrayant b , puis en divisant par $2a$:

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$



PROPRIÉTÉ Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta < 0$ Aucune racine réelle.

$\Delta = 0$ Une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

$\Delta > 0$ Deux racines distinctes $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.



Le déclic. La démonstration explique le double signe. Elle évite aussi de simplifier à tort $\sqrt{4a^2}$ en $2a$: cette racine vaut $2|a|$.



POINT DE VIGILANCE L'ordre des racines

Si $a < 0$, le dénominateur est négatif : la formule avec « - » ne donne pas forcément la plus petite racine. Range les valeurs obtenues : nous noterons toujours $x_1 < x_2$ les deux racines distinctes dans un tableau.

I • SAVOIR-FAIRE 04

Calculer les racines avec soin

Identifier, substituer, simplifier, puis vérifier.



SAVOIR-FAIRE Deux racines rationnelles

Réolvons $2x^2 + 3x - 2 = 0$. Ici $a = 2, b = 3, c = -2$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0.$$

On calcule $-b = -3, 2a = 4$ et $\sqrt{\Delta} = 5$ avant de remplacer :

$$x_1 = \frac{-3 - 5}{4} = -2, \quad x_2 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Donc $S = \{-2; \frac{1}{2}\}$.



Véifier. Pour $-2 : 2 \times 4 - 6 - 2 = 0$. Pour $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 0$. La somme vaut $-\frac{3}{2} = -b/a$ et le produit vaut $-1 = c/a$.

Deux racines irrationnelles

Pour $x^2 - 2x - 2 = 0, \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$. Or $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$. Donc

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

Les valeurs exactes sont à conserver. Des approximations peuvent servir à les placer sur un axe.

Une seule racine ou aucune

Pour $9x^2 - 6x + 1 = 0, \Delta = 36 - 36 = 0$, donc $x_0 = 6/18 = 1/3$. On reconnaît aussi $(3x - 1)^2 = 0$.

Pour $x^2 + 2x + 5 = 0, \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: aucune solution réelle. La forme $(x + 1)^2 + 4$ montre également que l'expression est strictement positive.



À TOI DE JOUER Trois cas à reconnaître

Détermine le nombre de racines réelles de $x^2 - 6x + 9, x^2 + 1$ et $x^2 - 5$.

Réponse pour te vérifier : Une : $(x - 3)^2$; aucune : $x^2 + 1 > 0$; deux : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

I • COMPRENDRE

Factoriser et étudier le signe

Les racines partagent la droite en intervalles.



PROPRIÉTÉ Factorisation sur les réels

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$:

- si $\Delta > 0$, avec deux racines x_1, x_2 , alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si $\Delta = 0$, avec racine double x_0 , alors $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta < 0$, il n'existe pas de factorisation en deux facteurs affines réels non constants.

Deux racines distinctes $x_1 < x_2$

À gauche de x_1 , les deux facteurs $x - x_1$ et $x - x_2$ sont négatifs : leur produit est positif. Entre les racines, ils ont des signes opposés : leur produit est négatif. À droite de x_2 , ils sont tous deux positifs. Il reste à multiplier par a .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	opposé de a	0	signe de a

Une racine double, ou aucune racine

Si $f(x) = a(x - x_0)^2$, son signe est celui de a partout sauf en x_0 , où il est nul. **Il ne change pas de signe en x_0 .**

Si $\Delta < 0$, l'identité $4af(x) = (2ax + b)^2 - \Delta$ a un membre de droite strictement positif. Donc $af(x) > 0$: $f(x)$ est strictement du signe de a pour tout réel x .



SAVOIR-FAIRE Ne pas oublier le coefficient dominant

$-2x^2 + 6x - 4 = -2(x - 1)(x - 2)$. Il est négatif sur $] -\infty; 1[\cup]2; +\infty[$, nul en 1 et 2, positif sur $]1; 2[$.



À TOI DE JOUER Deux pièges différents

Donne le signe de $-3(x + 2)^2$ et de $2x^2 + 2$.

Réponse pour te vérifier : Le premier est négatif sauf en -2 , où il est nul. Le second est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

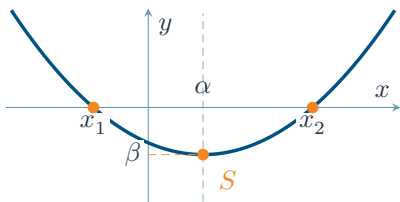
I • SYNTHÈSE GRAPHIQUE

Les six cas • deux racines

Premier couple : $\Delta > 0$. La parabole coupe l'axe horizontal en deux points.

Dans ces trois pages, $S(\alpha; \beta)$ désigne le sommet. Les croquis illustrent les cas; les tableaux donnent les conclusions générales. Deux racines distinctes sont toujours notées $x_1 < x_2$.

1 • $a > 0$ et $\Delta > 0$: un minimum négatif



Variations

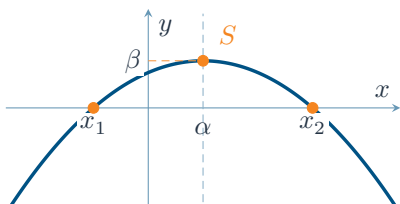
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

Signe

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$		+	−	+

Le minimum β est sous l'axe. Les deux branches le traversent : f est strictement négative entre x_1 et x_2 , strictement positive à l'extérieur.

2 • $a < 0$ et $\Delta > 0$: un maximum positif



Variations

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

Signe

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$		−	+	−

Le maximum β est au-dessus de l'axe. Les branches redescendent de chaque côté : f est strictement positive entre les racines, strictement négative à l'extérieur.



POINT DE VIGILANCE Les flèches et les signes ne disent pas la même chose

Une flèche qui monte indique que les valeurs augmentent; un signe + indique qu'elles sont au-dessus de zéro. Une fonction peut augmenter tout en restant négative : regarde la branche gauche du deuxième cas, avant x_1 .



Le déclic. À chaque racine simple, la courbe traverse l'axe : le signe change. Le sommet se situe entre les deux racines, à leur milieu.

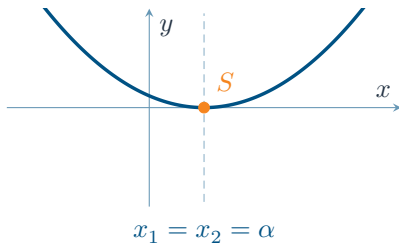
I • SYNTHÈSE GRAPHIQUE

Les six cas • une racine double

Deuxième couple : $\Delta = 0$. Le sommet est sur l'axe horizontal.

Ici $\beta = 0$ et $f(x) = a(x - \alpha)^2$. Les deux racines sont confondues : $x_1 = x_2 = \alpha$; il n'y a qu'une seule solution réelle distincte.

3 • $a > 0$ et $\Delta = 0$: un minimum nul



Variations

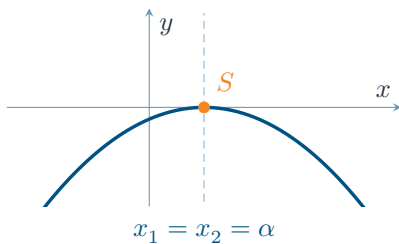
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

Signe

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

La parabole touche l'axe en son sommet sans le traverser. $f(\alpha) = 0$; pour tout $x \neq \alpha$, on a $f(x) > 0$.

4 • $a < 0$ et $\Delta = 0$: un maximum nul



Variations

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

Signe

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

La courbe touche l'axe par dessous. $f(\alpha) = 0$; pour tout $x \neq \alpha$, on a $f(x) < 0$.



POINT DE VIGILANCE Une racine ne provoque pas toujours un changement de signe

Le carré $(x - \alpha)^2$ est positif de part et d'autre de α . Son annulation ne le rend pas négatif. La racine double explique donc le zéro isolé entre deux signes identiques.



Le déclic. Les variations changent de sens au sommet; le signe de f , lui, reste le même de part et d'autre.

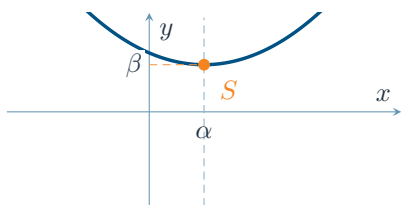
I • SYNTHÈSE GRAPHIQUE

Les six cas • aucune racine

Troisième couple : $\Delta < 0$. Toute la parabole reste d'un côté de l'axe.

Ne pas rencontrer l'axe ne signifie pas être toujours négative : c'est le signe de a , et donc la position du sommet dans ce cas, qui permet de conclure.

5 • $a > 0$ et $\Delta < 0$: un minimum positif



Variations

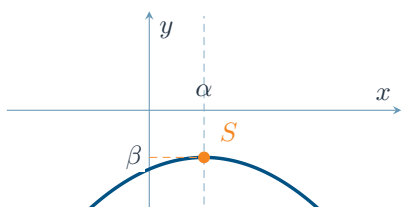
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

Signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

Même son point le plus bas est au-dessus de l'axe : $f(x) \geq \beta > 0$ pour tout x . Le tableau de signes ne contient aucun zéro.

6 • $a < 0$ et $\Delta < 0$: un maximum négatif



Variations

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

Signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

Même son point le plus haut est sous l'axe : $f(x) \leq \beta < 0$ pour tout x . La fonction est strictement négative sur $\mathbb{R}$.



PROPRIÉTÉ Deux lectures cohérentes

Le signe de a fixe le sens d'ouverture et les variations. Le signe de Δ donne le nombre de racines. Connaître a et $S(\alpha; \beta)$ permet la même décision en situant le sommet par rapport à l'axe. Le lien algébrique est $\Delta = -4a\beta$: il relie le discriminant à la hauteur du sommet et au sens d'ouverture.



Le déclic. Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ dans les tableaux décrivent des valeurs qui deviennent arbitrairement grandes ou petites. Ce ne sont pas des valeurs prises en un point.

I • SAVOIR-FAIRE 05

Résoudre une inéquation

Passer de « comparer » à « étudier un signe ».



SAVOIR-FAIRE Résoudre $2x^2 + 3x \leq 2$

1 • Tout ramener dans un membre. On soustrait 2 des deux côtés :

$$2x^2 + 3x - 2 \leq 0.$$

2 • Étudier le trinôme. Ses racines sont -2 et $\frac{1}{2}$, et son coefficient dominant est positif.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 + 3x - 2$	+	0	−	0	+

3 • Lire la ligne utile. On veut les valeurs négatives ou nulles :

$$S = \left[-2; \frac{1}{2} \right].$$



Vérifier. Le nombre 0 est entre les racines : $2 \times 0^2 + 3 \times 0 = 0 \leq 2$. Les bornes donnent l'égalité, donc elles sont incluses.

Comparer deux courbes

Pour savoir quand x^2 est au-dessus de $2x + 3$, on écrit

$$x^2 \geq 2x + 3 \iff x^2 - 2x - 3 \geq 0 \iff (x + 1)(x - 3) \geq 0.$$

Le coefficient dominant est positif; la solution est donc $] -\infty; -1] \cup [3; +\infty[$. Aux abscisses -1 et 3 , les courbes se rencontrent.



POINT DE VIGILANCE ET à l'intérieur, OU à l'extérieur

$x^2 \leq 4$ signifie $-2 \leq x \leq 2$: les deux bornes sont reliées par **et**.

$x^2 \geq 4$ signifie $x \leq -2$ **ou** $x \geq 2$: on réunit deux intervalles.



À TOI DE JOUER Attention aux bornes

Résous $x^2 - 5x + 6 < 0$.

Réponse pour te vérifier : $(x - 2)(x - 3) < 0$, donc $S =]2; 3[$. L'inégalité stricte exclut les racines.

I • SAVOIR-FAIRE 06

Reconstruire une fonction

Traduire les données avant de choisir des inconnues.

Deux racines et un point

Une parabole coupe l'axe des abscisses en -1 et 4 et passe par $A(0; -8)$. Les racines invitent à écrire

$$f(x) = a(x + 1)(x - 4), \quad a \neq 0.$$

Le point A appartient à la courbe : $f(0) = -8$. Ainsi

$$-4a = -8 \iff a = 2.$$

Donc $f(x) = 2(x + 1)(x - 4)$. Les deux racines ne suffisaient pas à fixer a ; le point supplémentaire l'a déterminé.

Un sommet et un point

Le sommet est $S(2; -3)$ et la courbe passe par $B(0; 5)$. Le sommet invite à écrire

$$g(x) = a(x - 2)^2 - 3.$$

Puis $g(0) = 5$ donne $4a - 3 = 5$, donc $a = 2$. Ainsi

$$g(x) = 2(x - 2)^2 - 3.$$

 **Véifier.** On retrouve le sommet car le carré s'annule en 2, et $g(0) = 8 - 3 = 5$. Développer donnerait $2x^2 - 8x + 5$, mais ce n'était pas nécessaire pour trouver la fonction.



SAVOIR-FAIRE Associer donnée et forme

Deux racines distinctes x_1, x_2

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Un sommet $(\alpha; \beta)$

$$a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Trois points d'abscisses distinctes

$$ax^2 + bx + c, \text{ puis trois équations}$$

Vérifie ensuite que $a \neq 0$. Si les trois points sont alignés, la fonction obtenue est affine.



À TOI DE JOUER À toi de traduire

Une fonction a pour racines 2 et 5, et vaut 10 en 0. Retrouve-la.

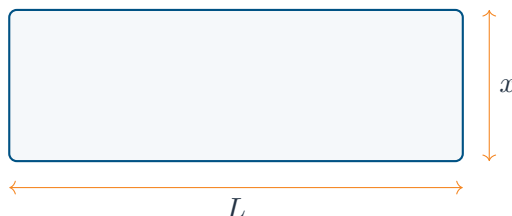
Réponse pour te vérifier : $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$, puis $10a = 10$, donc $f(x) = (x - 2)(x - 5)$.

I • SAVOIR-FAIRE 07

Modéliser et optimiser

Le calcul doit revenir à la grandeur demandée.

On dispose de 20 m de bordure pour entourer un rectangle. On cherche l'aire maximale possible.



1 • Choisir les variables et le domaine. On note x la valeur numérique de la largeur en mètres et L celle de la longueur en mètres.

Le périmètre impose $2x + 2L = 20$, soit $L = 10 - x$. Les deux dimensions doivent être positives : $0 < x < 10$.

2 • Exprimer ce que l'on veut optimiser. L'aire $A(x)$, exprimée en mètres carrés, est donnée par

$$A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Ici x et $10 - x$ sont les mesures des côtés en mètres; leur produit donne la mesure de l'aire en m^2 .

3 • Faire apparaître une borne atteinte.

$$A(x) = -[(x - 5)^2 - 25] = 25 - (x - 5)^2 \leq 25.$$

L'égalité est obtenue pour $x = 5$, qui appartient bien au domaine. Alors $L = 5$.

4 • Conclure dans le contexte. L'aire maximale est 25 m^2 , obtenue pour un carré de côté 5 m.



Véifier. Les quatre côtés mesurent au total 20 m. Une largeur de 4 m donne une longueur de 6 m et seulement 24 m^2 .



POINT DE VIGILANCE Maximum et valeur de x

Le nombre 5 indique la largeur optimale en mètres; le nombre 25 indique l'aire maximale en mètres carrés. Ce ne sont ni la même grandeur ni la même unité.

I • FAIRE LE POINT

La carte des décisions

Commence par la question, puis choisis la forme et le contrôle.

Je cherche...	Je regarde d'abord...	Je contrôle...
Des racines	Un facteur commun, une identité, des racines simples; sinon Δ .	Une substitution; la somme et le produit si adaptés.
Un signe	Le coefficient dominant et les racines rangées.	Une valeur test; les zéros; la racine double.
Une inéquation	La différence entre les deux membres.	Bornes incluses ou exclues; domaine éventuel.
Un extremum	La forme canonique et le domaine.	L'extremum est-il atteint dans ce domaine?
Une fonction	La nature des données : racines, sommet, points.	Toutes les conditions de départ.

Les cinq phrases que tu dois pouvoir expliquer

1. Deux formes d'une fonction sont deux expressions égales pour tout x .
2. Un carré positif ou nul explique les extrema et les trois cas du discriminant.
3. Une factorisation garde le coefficient dominant a .
4. Avec deux racines distinctes, le signe est celui de a à l'extérieur des racines.
5. Une solution mathématique n'est retenue dans un problème que si elle respecte ses contraintes.

Pour choisir tes premiers exercices

- **Les calculs te freinent** : commence par 1 à 6, puis 9, 11, 14 et 15.
- **Tu sais calculer mais hésites sur la méthode** : travaille 4, 8, 10, 16 à 24.
- **Tu veux relier les idées** : cherche les problèmes 25 à 30; termine par 31 et 32 si tu souhaites approfondir.



Le déclic. Une correction utile contient le choix de méthode, le calcul et la conclusion. Si tu as le bon nombre sans savoir pourquoi, reprends le raisonnement avant de passer à la suite.

II • EXERCICES • PRENDRE SES REPÈRES

01 à 04 • Lire et transformer

Travaille sur ton cahier. Écris les calculs qui justifient chaque réponse.

1 Reconnaître après simplification

Fondations

Pour chaque expression, dis si elle définit une fonction du second degré. Si oui, donne a , b et c dans la forme développée réduite.

$$A(x) = -3x^2 + 7, \quad B(x) = 2x(x - 4) + 1, \quad C(x) = (x + 2)^2 - x^2, \quad D(x) = (2x - 1)^2.$$

Explique pourquoi la présence d'un carré dans une écriture ne suffit pas à conclure.

Correction 1

2 Carrés et signes

Fondations

- Développe $(x - 5)^2$ et $(2x + 3)^2$.
- Résous dans $\mathbb{R}$: $(x - 2)^2 = 16$, puis $(2x + 1)^2 = 0$, puis $(x + 1)^2 = -3$.
- Un élève affirme que $(x - 2)^2 = 16$ a pour seule solution 6. Explique ce qu'il a oublié.

Correction 2

3 Choisir une factorisation directe

Fondations

Factorise, puis résous l'équation obtenue en égalant chaque expression à zéro :

$$A(x) = 4x^2 - 20x, \quad B(x) = 9x^2 - 16, \quad C(x) = x^2 + 10x + 25.$$

Dans le premier cas, explique pourquoi il serait risqué de diviser directement par x .

Correction 3

4 La forme qui répond à la question

Choix de méthode

On donne trois écritures d'une fonction f :

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 10 = 2(x - 1)(x - 5) = 2(x - 3)^2 - 8.$$

- Vérifie les égalités par développement.
- Calcule $f(0)$; résous $f(x) = 0$; donne le minimum de f et l'abscisse où il est atteint.
- Résous $f(x) = 10$ sans utiliser le discriminant. Pour chaque question, précise la forme choisie.

Correction 4

II • EXERCICES • PRENDRE SES REPÈRES

05 à 08 • Carré et parabole

Passer de l'expression aux informations géométriques.

5 Compléter le carré

Fondations

Mets les expressions suivantes sous forme canonique. Fais apparaître le terme ajouté puis retiré, et vérifie la dernière forme en la développant.

$$A(x) = x^2 - 10x + 6, \quad B(x) = 2x^2 + 8x - 1, \quad C(x) = -3x^2 + 6x + 4.$$

Pour chaque fonction, donne le sommet.

[Correction 5](#)**6 Distinguer extremum et abscisse**

Application

On définit $f(x) = 3(x + 2)^2 - 5$ et $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donne le sommet, l'axe de symétrie et l'extremum de chaque fonction.
2. Justifie, par une inégalité, que f ne prend jamais la valeur -6 .
3. Résous $g(x) = 5$, puis vérifie la symétrie des solutions autour de 4.

[Correction 6](#)**7 Un intervalle change la réponse**

Application

Soit $f(x) = -(x - 2)^2 + 9$.

1. Donne ses variations sur $\mathbb{R}$.
2. Détermine son minimum et son maximum sur $[3; 6]$.
3. Même question sur $[-1; 4]$. Justifie pourquoi on ne peut pas seulement comparer les deux bornes pour trouver le maximum.

[Correction 7](#)**8 Construire une courbe avec des points exacts**

Représenter

Soit $f(x) = (x + 1)^2 - 4$.

1. Détermine le sommet et les intersections avec les deux axes.
2. Calcule les images de -2 et de 0 ; explique leur égalité.
3. Trace un croquis cohérent. Conjecture où f est strictement négative, puis démontre-le à l'aide d'une factorisation.

[Correction 8](#)

II • EXERCICES • CHOISIR UNE MÉTHODE

09 à 12 • Résoudre

Ne calcule le discriminant que s'il apporte quelque chose.

9 Quatre équations, plusieurs outils

Application

Résous dans $\mathbb{R}$ en choisissant la méthode la plus courte, puis explique ton choix :

a) $6x^2 - 15x = 0;$

b) $2(x + 1)^2 = 18;$

c) $5x^2 + 20 = 0;$

d) $(x - 4)(x + 2) = 0.$

Correction 9

10 Somme, produit et racine apparente

Application

1. Sans discriminant, factorise $x^2 - 9x + 20$ et $x^2 + 2x - 15$. Explique comment les signes aident à chercher.
2. Pour $p(x) = 3x^2 - 10x + 3$, vérifie que 3 est une racine. Déduis l'autre racine du produit, puis vérifie la factorisation obtenue.
3. Pourquoi ne peut-on pas déduire de l'échec d'une recherche de racines entières qu'il n'y a aucune racine réelle? Donne un exemple.

Correction 10

11 Les trois cas du discriminant

Application

Résous dans $\mathbb{R}$ les trois équations. Identifie les coefficients avec leurs signes et calcule Δ avant de conclure.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0, \quad 4x^2 + 12x + 9 = 0, \quad 3x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Pour l'équation ayant deux racines, contrôle leur somme et leur produit.

Correction 11

12 Fractions et racines carrées

Application

1. Résous $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$. Explique pourquoi tu peux d'abord multiplier toute l'équation par 2.
2. Donne les solutions exactes, puis leurs valeurs approchées au centième.
3. Résous $-2x^2 + 4x + 1 = 0$ et range les racines dans l'ordre croissant.

Correction 12

II • EXERCICES • CHOISIR UNE MÉTHODE

13 à 16 • Factoriser et comparer

Un tableau de signes se lit en fonction de l'inégalité demandée.

13 Factoriser sur les réels

Application

Factorise autant que possible sur $\mathbb{R}$:

$$A(x) = 2x^2 - 7x + 3, \quad B(x) = -x^2 + 6x - 9, \quad C(x) = x^2 - 2, \quad D(x) = x^2 + 2x + 5.$$

Si une factorisation en facteurs affines réels est impossible, justifie-le.

Correction 13

14 Trois situations de signe

Application

Dresse un tableau de signes pour chaque expression :

$$A(x) = -2(x + 1)(x - 4), \quad B(x) = 3(x - 2)^2, \quad C(x) = -x^2 - 4.$$

Précise les zéros et les intervalles où l'expression est strictement positive ou strictement négative.

Correction 14

15 Les bornes font partie de la réponse

Application

Résous dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x^2 - 5x + 6 \leq 0; \\ \text{b)} & -x^2 + x + 6 > 0; \\ \text{c)} & (x - 3)^2 \geq 0; \\ \text{d)} & 2x^2 + 1 < 0. \end{array}$$

Explique pourquoi les deux dernières inéquations n'exigent aucun discriminant.

Correction 15

16 Deux courbes à comparer

Raisonner

On définit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et $g(x) = 2x - 4$.

1. Trouve les abscisses et les ordonnées de leurs points d'intersection.
2. Détermine où la courbe de f est strictement en dessous de celle de g .
3. Pour $x = 3$, contrôle directement le sens de la comparaison.

Correction 16

II • EXERCICES • RELIER LES INFORMATIONS

17 à 20 • Retrouver un modèle

Justifie le choix de forme avant de calculer les coefficients.

17 Deux racines ne font pas une fonction unique

Problème inverse

1. Donne toutes les fonctions du second degré qui s'annulent en -2 et 3 .
2. Parmi elles, détermine celle dont la courbe passe par $A(1; 12)$.
3. Donne sa forme développée, son signe et son maximum.

[Correction 17](#)

18 Le sommet comme point de départ

Problème inverse

Une parabole a pour sommet $S(-1; 4)$ et passe par $B(1; -4)$.

1. Détermine la fonction f correspondante.
2. Résous $f(x) = 0$ et explique la symétrie des racines.
3. Résous $f(x) \geq 2$.

[Correction 18](#)

19 Trois points, trois informations

Problème inverse

On cherche une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par $A(0; 2)$, $B(1; 0)$ et $C(3; 2)$.

1. Traduis les trois données en équations, puis détermine a , b et c .
2. Vérifie les trois points dans la fonction trouvée.
3. Détermine les racines et le minimum.

[Correction 19](#)

20 Une parabole qui monte ou descend

Raisonner

Pour un réel k , on définit $f_k(x) = (x - 2)^2 + k$.

1. Discute le nombre de racines selon k , sans calculer de discriminant.
2. Pour $k = -9$, donne les racines et le signe de f_k .
3. Pour quelles valeurs de k a-t-on $f_k(x) \geq 0$ pour tout réel x ? Justifie aussi la nécessité de ta condition.

[Correction 20](#)

II • EXERCICES • RAISONNER

21 à 24 • Conditions et erreurs

Une bonne méthode conserve les solutions et respecte le domaine.

21 Corriger, pas seulement contredire

Esprit critique

Chaque phrase est fausse. Explique l'erreur, puis propose la conclusion correcte.

1. « $x^2 = 5$ donne seulement $x = \sqrt{5}$. »
2. « $x^2 - 4x = 0$; je divise par x et trouve comme seule solution 4. »
3. « $-2(x - 1)(x - 3)$ est positif à l'extérieur des racines. »
4. « Si $\Delta < 0$, alors le trinôme est toujours négatif. » Donne un contre-exemple.

[Correction 21](#)

22 Un quotient et une valeur interdite

Combiner

Résous $\frac{x^2 - 4}{x - 1} \geq 0$.

1. Donne le domaine et factorise le numérateur.
2. Construis un tableau en faisant figurer -2 , 1 et 2 .
3. Écris l'ensemble des solutions. Explique le statut différent des trois valeurs remarquables.

[Correction 22](#)

23 Équation avec un dénominateur

Combiner

Résous $\frac{3}{x - 1} = x + 1$.

1. Quelle valeur est interdite? Sous quelle condition peux-tu multiplier par $x - 1$?
2. Résous l'équation polynomiale obtenue, puis vérifie chaque solution dans l'équation initiale.
3. Explique pourquoi résoudre une équation et multiplier une inéquation par une expression de signe inconnu ne posent pas le même problème.

[Correction 23](#)

24 Une droite horizontale et une parabole

Raisonner

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Selon le réel k , combien de points la droite $y = k$ possède-t-elle en commun avec la parabole? Pour $k = 1$, donne leurs coordonnées.

[Correction 24](#)

II • EXERCICES • MODÉLISER

25 et 26 • Deux clôtures

Dessine, nomme les dimensions, puis traduis la contrainte.

25 Un rectangle à construire

Problème

Un atelier dispose de 28 m de baguette pour fabriquer un cadre rectangulaire. La largeur doit être au moins 3 m et ne doit pas dépasser la longueur. On note x la mesure de la largeur en mètres.

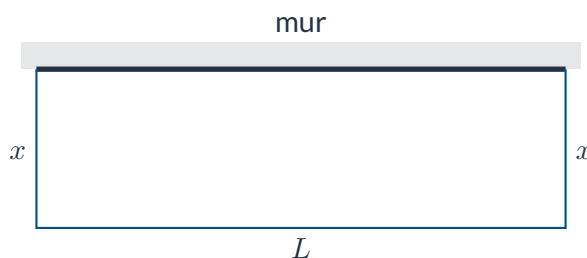
1. Exprime la longueur en fonction de x et détermine l'intervalle admissible pour x .
2. Exprime l'aire $A(x)$ en m^2 , puis mets-la sous forme canonique.
3. Quelles dimensions donnent l'aire maximale? Donne cette aire avec son unité.
4. Quelles largeurs permettent une aire d'au moins 45 m^2 ? Donne les longueurs correspondantes.

Correction 25

26 Contre un mur

Problème

Un jardin rectangulaire est aménagé contre un mur : ce côté ne nécessite pas de grillage. On dispose de 24 m de grillage pour les trois autres côtés. On note x la profondeur, perpendiculaire au mur, en mètres.



1. Justifie $L = 24 - 2x$ et $0 < x < 12$.
2. Détermine la profondeur qui maximise l'aire. Le rectangle optimal est-il un carré?
3. Pour quelles profondeurs l'aire vaut-elle 64 m^2 ?
4. Pour quelles profondeurs est-elle au moins égale à 64 m^2 ?

Correction 26

II • EXERCICE 27 • MODÉLISER

Vendre ne suffit pas pour gagner

Distingue le chiffre d'affaires, le coût total et le bénéfice.

27 Une série de porte-clés

Problème économique

Un atelier fabrique des porte-clés personnalisés et vend chaque objet 12 €. Il fabrique et vend le même nombre entier q d'objets, avec $0 \leq q \leq 180$: il n'y a pas d'inventus dans ce modèle. Le coût total, en euros, est modélisé par

$$C(q) = 0,05q^2 + 2q + 320.$$

Cette formule représente les dépenses de la série : préparation, matières et fabrication. On note $R(q)$ la recette et $B(q)$ le bénéfice, tous deux en euros.

1. Explique $C(0) = 320$. Exprime $R(q)$, puis justifie

$$B(q) = R(q) - C(q) = -0,05q^2 + 10q - 320.$$

2. Vérifie la factorisation $B(q) = -0,05(q - 40)(q - 160)$. Détermine les deux seuils où le bénéfice est nul. Pour quels nombres entiers d'objets l'atelier fait-il un bénéfice **strictement positif**?
3. Vérifie la forme $B(q) = 180 - 0,05(q - 100)^2$. Dédus la quantité à vendre pour maximiser le bénéfice, puis calcule la recette, le coût et le bénéfice correspondants.
4. Esquisse la courbe de B sur $[0; 180]$, en plaçant le sommet et les deux zéros. Explique graphiquement pourquoi vendre davantage après l'optimum peut réduire le bénéfice.
5. Combien d'objets faut-il vendre pour obtenir au moins 150 € de bénéfice? Donne d'abord l'intervalle réel, puis les quantités entières admissibles.

Correction 27



Le déclic. Une recette positive ne prouve pas que l'activité est bénéficiaire. L'atelier doit d'abord couvrir ses coûts. Le maximum demandé est celui de B , sur le domaine donné.

II • EXERCICE 28 • MODÉLISER

Une ouverture parabolique

La hauteur utile doit être vérifiée sur toute la largeur du véhicule.

28 Une ouverture parabolique

Problème

Une ouverture est modélisée, dans un repère où les coordonnées sont mesurées en mètres, par

$$h(x) = 3 - \frac{x^2}{3}, \quad -3 \leq x \leq 3,$$

où x est la position horizontale par rapport au centre et $h(x)$ la hauteur disponible, en mètres.

1. Donne la hauteur maximale et la largeur au sol.
2. Un véhicule rectangulaire de largeur 2,4 m et de hauteur 2,4 m passe-t-il lorsqu'il est centré? On suppose le sol horizontal et on néglige toute marge.
3. Quelle est la largeur maximale d'un véhicule centré de hauteur 2,4 m? Donne une valeur exacte puis au centimètre près.
4. Pourquoi la vérification aux deux coins supérieurs suffit-elle ici?

Correction 28

II • EXERCICES • MODÉLISER

29 et 30 • Des aires à partager

Élimine les solutions qui ne représentent pas la situation.

29 Un cadre autour d'une affiche

Problème

Une affiche mesure 30 cm sur 20 cm. On ajoute à l'extérieur une bordure de largeur uniforme x cm, avec $x > 0$. L'aire de la bordure seule doit être égale à 216 cm^2 .

1. Dessine les dimensions intérieures et extérieures.
2. Exprime l'aire de la bordure en fonction de x , en précisant l'unité de chaque aire.
3. Résous l'équation obtenue. Explique pourquoi une seule solution est admissible.
4. Vérifie les dimensions extérieures et les deux aires dans la situation initiale.

Correction 29

30 Deux carrés avec un ruban

Problème

On coupe un ruban de 40 cm en deux morceaux. Chaque morceau sert à former le périmètre d'un carré. Les deux morceaux ont des longueurs strictement positives. On note x le côté du premier carré en centimètres.

1. Exprime le côté du second carré en fonction de x et donne le domaine.
2. Montre que la somme des aires, en cm^2 , est $S(x) = 2(x - 5)^2 + 50$.
3. Trouve la somme minimale des aires et les longueurs des morceaux correspondantes.
4. Peut-on obtenir une somme des aires égale à 68 cm^2 ? Si oui, donne toutes les répartitions.
5. Existe-t-il une somme maximale si les deux carrés doivent rester non dégénérés? Justifie.

Correction 30



À TOI DE JOUER Avant la correction

Pour chacun des problèmes 25 à 30, vérifie que ta rédaction contient : une variable définie; un domaine; une relation justifiée; une résolution; une conclusion avec unité.

II • EXERCICES • APPROFONDIR

31 et 32 • Changer de regard

Deux prolongements facultatifs après la maîtrise du cœur du chapitre.

31 Quand le degré change

Approfondissement

Pour un réel m , on étudie l'équation

$$(m - 1)x^2 + 2x + 1 = 0.$$

1. Pourquoi faut-il commencer par séparer le cas $m = 1$? Résous ce cas.
2. Pour $m \neq 1$, calcule le discriminant puis discute le nombre de solutions réelles selon m .
3. Donne une conclusion qui prend aussi en compte $m = 1$.
4. Détermine les solutions pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$. Vérifie chaque cas directement.

Correction 31

32 Du troisième au second degré

Approfondissement

Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

1. Vérifie que 2 est une racine.
2. Cherche a, b, c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ en développant puis en identifiant les coefficients.
3. Factorise le polynôme du second degré trouvé, puis résous $P(x) = 0$.
4. Étudie le signe de P et résous $P(x) \leq 0$.
5. Explique pourquoi la règle « signe de a à l'extérieur des racines » apprise pour un trinôme ne s'applique pas directement à ce polynôme de degré trois.

Correction 32

**SAVOIR-FAIRE** Après ta recherche

Compare ta démarche à la correction. Une autre méthode peut être juste : vérifie ses conditions, ses calculs et sa conclusion. Note une idée précise à réutiliser plutôt que de recopier toute la solution.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

01 et 02 • Revenir aux bases

Garde les signes dans les coefficients et les parenthèses dans les substitutions.



SAVOIR-FAIRE Le fil à reproduire au contrôle

Commence par identifier la question : valeur, racine, signe, sommet ou extremum. Choisis ensuite la forme qui rend cette information visible; ne développe pas par réflexe. Écris les conditions de validité, conserve les valeurs exactes, puis vérifie une racine par substitution ou un extremum avec le domaine du problème.

1 Reconnaître après simplification

Énoncé

Pour A , l'expression est déjà développée réduite : $a = -3, b = 0, c = 7$. Le coefficient de x^2 est non nul, donc c'est bien du second degré.

$$B(x) = 2x(x - 4) + 1 = 2x^2 - 8x + 1.$$

Ainsi $a = 2, b = -8, c = 1$: c'est aussi du second degré.

$$C(x) = (x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4.$$

Le terme en x^2 disparaît : C est affine et non du second degré.

$$D(x) = (2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1.$$

Donc $a = 4, b = -4, c = 1$. La présence d'un carré ne suffit pas : l'exemple C montre qu'il peut être compensé par un autre terme.



Vérifier. Pour $D(0)$, la forme initiale donne $(-1)^2 = 1$, comme le coefficient constant de la forme développée.

2 Carrés et signes

Énoncé

1. En utilisant les identités remarquables :

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25, \quad (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

Le carré de $2x$ est $4x^2$; le terme croisé est $2 \times 2x \times 3 = 12x$.

2. Pour la première équation, les deux réels dont le carré vaut 16 sont 4 et -4 :

$$(x - 2)^2 = 16 \iff x - 2 = 4 \text{ ou } x - 2 = -4 \iff x = 6 \text{ ou } x = -2.$$

Pour la deuxième :

$$(2x + 1)^2 = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Enfin, $(x + 1)^2$ est toujours positif ou nul : il ne peut pas être égal à -3 . L'ensemble des solutions est vide.

3. L'élève a oublié $x - 2 = -4$. La solution -2 est valide, puisque $(-2 - 2)^2 = (-4)^2 = 16$.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

03 et 04 • Choisir une forme

Une transformation est utile lorsqu'elle simplifie la question.

3 Factorisations directes

Énoncé

A. Le facteur commun est $4x$:

$$4x^2 - 20x = 4x(x - 5), \quad 4x(x - 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

Diviser par x exclurait le cas $x = 0$, pourtant solution.

B. C'est une différence de carrés :

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4).$$

L'équation donne $3x - 4 = 0$ ou $3x + 4 = 0$, donc $x = \frac{4}{3}$ ou $x = -\frac{4}{3}$.

C. On reconnaît le carré d'une somme :

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2.$$

Un carré est nul exactement quand sa base est nulle : la seule solution est -5 .

4 La forme qui répond à la question

Énoncé

1. Les deux développements donnent la même expression :

$$\begin{aligned} 2(x - 1)(x - 5) &= 2(x^2 - 6x + 5) = 2x^2 - 12x + 10, \\ 2(x - 3)^2 - 8 &= 2(x^2 - 6x + 9) - 8 = 2x^2 - 12x + 10. \end{aligned}$$

2. La forme développée donne $f(0) = 10$. La forme factorisée donne

$$f(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 5.$$

La forme canonique donne $2(x - 3)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq -8$. L'égalité est atteinte pour $x = 3$: le minimum est -8 , atteint en 3.

3. La forme développée permet de soustraire 10 facilement :

$$\begin{aligned} f(x) = 10 &\iff 2x^2 - 12x + 10 = 10 \\ &\iff 2x^2 - 12x = 0 \iff 2x(x - 6) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont 0 et 6. La forme canonique aurait aussi conduit à $(x - 3)^2 = 9$, avec les mêmes solutions.



Vérifier. Les abscisses 0 et 6 sont symétriques autour de 3, l'abscisse du sommet.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

05 et 06 • Le rôle du carré

Faire apparaître la compensation permet de comprendre le calcul.

5 Compléter le carré

Énoncé

A. Puisque $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$, il faut retirer 25 :

$$A(x) = (x - 5)^2 - 25 + 6 = (x - 5)^2 - 19.$$

Son sommet est $(5; -19)$. Développer redonne $x^2 - 10x + 25 - 19 = x^2 - 10x + 6$.

B. Factorisons d'abord 2 :

$$\begin{aligned} B(x) &= 2(x^2 + 4x) - 1 = 2[(x + 2)^2 - 4] - 1 \\ &= 2(x + 2)^2 - 9. \end{aligned}$$

Le sommet est $(-2; -9)$. Vérification : $2x^2 + 8x + 8 - 9 = 2x^2 + 8x - 1$.

C. Le coefficient extérieur est -3 :

$$\begin{aligned} C(x) &= -3(x^2 - 2x) + 4 = -3[(x - 1)^2 - 1] + 4 \\ &= -3(x - 1)^2 + 7. \end{aligned}$$

Le sommet est $(1; 7)$. Vérification : $-3x^2 + 6x - 3 + 7 = -3x^2 + 6x + 4$.

6 Valeur et abscisse

Énoncé

1. Pour f , le carré est $(x - (-2))^2$: sommet $(-2; -5)$ et axe $x = -2$. Comme $3 > 0$, son minimum est -5 , atteint en -2 .

Pour g , le sommet est $(4; 7)$, l'axe $x = 4$ et le coefficient $-\frac{1}{2} < 0$: le maximum est 7, atteint en 4.

2. Pour tout x , $3(x + 2)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq -5$. La valeur -6 est strictement inférieure à cette borne : elle n'est jamais atteinte.

3. Isolons le carré :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 7 &= 5 \iff -\frac{1}{2}(x - 4)^2 = -2 \\ &\iff (x - 4)^2 = 4 \iff x - 4 = -2 \text{ ou } x - 4 = 2. \end{aligned}$$

Donc $x = 2$ ou $x = 6$: les deux abscisses sont à distance 2 du centre 4.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

07 et 08 • Le domaine et le dessin

Lire une courbe ne dispense pas de justifier les valeurs exactes.

7 Un intervalle change la réponse

Énoncé

1. Le coefficient dominant est négatif : f est croissante sur $] -\infty; 2]$, puis décroissante sur $[2; +\infty[$. Son maximum sur $\mathbb{R}$ est 9.

2. L'intervalle $[3; 6]$ est situé à droite du sommet, donc f y décroît. On calcule

$$f(3) = -(3-2)^2 + 9 = 8, \quad f(6) = -(6-2)^2 + 9 = -7.$$

Le maximum sur cet intervalle est 8, atteint en 3; le minimum est -7 , atteint en 6.

3. Sur $[-1; 4]$, le sommet est accessible. Le maximum est donc $f(2) = 9$. Pour le minimum, on compare les extrémités des deux branches :

$$f(-1) = -9 + 9 = 0, \quad f(4) = -4 + 9 = 5.$$

Le minimum est 0, atteint en -1 . Comparer seulement les bornes aurait fait manquer le maximum situé à l'intérieur de l'intervalle.

8 Une courbe et ses points exacts

Énoncé

1. Le sommet est $S(-1; -4)$. Pour les intersections avec l'axe horizontal :

$$(x+1)^2 - 4 = 0 \iff x+1 = -2 \text{ ou } x+1 = 2,$$

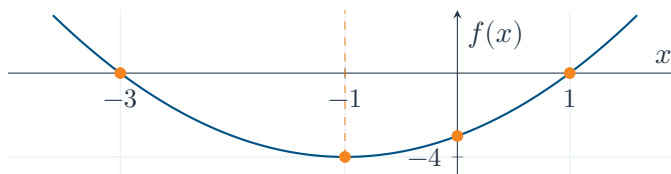
d'où $x = -3$ ou $x = 1$. Les points sont $(-3; 0)$ et $(1; 0)$. L'intersection avec l'axe vertical est $(0; f(0)) = (0; -3)$.

2. $f(-2) = (-1)^2 - 4 = -3 = f(0)$. Les abscisses -2 et 0 sont symétriques autour de -1 .

3. Place ces points et l'axe $x = -1$, puis dessine une parabole ouverte vers le haut. Le croquis suggère que f est strictement négative entre -3 et 1 . Pour le prouver :

$$f(x) = (x+1-2)(x+1+2) = (x-1)(x+3).$$

Entre -3 et 1 , le premier facteur est négatif et le second positif : $f(x) < 0$. Aux bornes, $f(x) = 0$; à l'extérieur, les deux facteurs ont le même signe et $f(x) > 0$.



III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

09 et 10 • Des racines accessibles

L'observation d'une structure précède le calcul systématique.

9 Choisir l'outil le plus court

Énoncé

a) Un facteur commun évite le discriminant :

$$6x^2 - 15x = 3x(2x - 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}.$$

b) Le carré est déjà visible :

$$2(x + 1)^2 = 18 \iff (x + 1)^2 = 9 \iff x + 1 = -3 \text{ ou } x + 1 = 3.$$

Donc $S = \{-4; 2\}$.

c) $5x^2 + 20 = 0 \iff x^2 = -4$. Un carré ne peut pas être négatif : $S = \emptyset$.

d) Le produit est déjà factorisé : $x - 4 = 0$ ou $x + 2 = 0$, donc $S = \{-2; 4\}$.

10 Somme, produit et racine apparente

Énoncé

1. Pour $x^2 - 9x + 20$, on cherche une somme 9 et un produit 20. Le produit est positif et la somme positive : deux racines réelles éventuelles sont toutes deux positives. Les nombres 4 et 5 conviennent :

$$x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5).$$

Pour $x^2 + 2x - 15$, la somme vaut -2 et le produit -15 . On cherche deux nombres de signes opposés : -5 et 3 conviennent. Ainsi

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3).$$

2. $p(3) = 3 \times 9 - 30 + 3 = 0$. Le produit des racines vaut $c/a = 1$. Si l'une vaut 3, l'autre vaut $1/3$:

$$p(x) = 3(x - 3) \left(x - \frac{1}{3}\right) = (x - 3)(3x - 1).$$

Vérification : $(x - 3)(3x - 1) = 3x^2 - x - 9x + 3 = 3x^2 - 10x + 3$.

3. $x^2 - 2$ n'a aucune racine entière mais possède les deux racines réelles $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Une recherche entière ne couvre pas tous les réels.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

11 et 12 • Le calcul des racines

Calcule séparément le discriminant, le numérateur et le dénominateur.

11 Trois discriminants

Énoncé

Première équation. $a = 2, b = -7, c = 3$. Donc

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25 > 0.$$

Les racines sont $\frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{7+5}{4} = 3$. Leur somme est $\frac{7}{2} = -b/a$ et leur produit $\frac{3}{2} = c/a$.

Deuxième équation. $a = 4, b = 12, c = 9$. Ici $\Delta = 144 - 144 = 0$, donc l'unique racine est $-12/8 = -3/2$. On peut aussi écrire $(2x + 3)^2 = 0$.

Troisième équation. $a = 3, b = -2, c = 2$. Ici $\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$: aucune solution réelle.

12 Fractions et racines carrées

Énoncé

1. Multiplier les deux membres par le nombre non nul 2 est réversible :

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \iff x^2 - 3x - 2 = 0.$$

On a $\Delta = 9 + 8 = 17 > 0$, donc

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

2. Avec $\sqrt{17} \approx 4,1231$, on obtient $x_1 \approx -0,56$ et $x_2 \approx 3,56$. Les expressions avec le radical restent les réponses exactes.

3. Pour $-2x^2 + 4x + 1 = 0$, les coefficients donnent

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 24, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}.$$

Les deux valeurs sont

$$\frac{-4 - 2\sqrt{6}}{-4} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{-4} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Dans l'ordre croissant, elles sont donc $1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ puis $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$. Le dénominateur négatif explique l'inversion apparente.



Vérifier. La somme vaut $2 = -b/a$ et le produit $1 - 6/4 = -1/2 = c/a$.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

13 et 14 • Factoriser et signer

Une racine double annule sans faire changer le signe.

13 Factorisations réelles

Énoncé

A. Les racines trouvées à l'exercice 11 sont $1/2$ et 3 . On garde le coefficient dominant 2 :

$$A(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 3) = (2x - 1)(x - 3).$$

B. $B(x) = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2.$

C. $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$

D. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Il n'y a aucune racine réelle, donc aucune factorisation en deux facteurs affines réels non constants. La forme $(x + 1)^2 + 4$ confirme l'absence de zéro.

14 Trois situations de signe

Énoncé

A. Les racines sont -1 et 4 ; le coefficient dominant est négatif.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi $A > 0$ sur $] -1; 4[$; $A < 0$ sur $] -\infty; -1[\cup] 4; +\infty[$.

B. Un carré est strictement positif sauf lorsque sa base est nulle. Le coefficient 3 est positif :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$B(x)$	$+$	0	$+$

L'expression n'est jamais négative et ne change pas de signe en 2 .

C. Puisque $x^2 \geq 0$, on a $-x^2 - 4 \leq -4 < 0$. L'expression est strictement négative sur $\mathbb{R}$, sans aucun zéro.

x	$-\infty$	$+\infty$
$C(x)$	$-$	

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

15 et 16 • Lire la bonne région

Résoudre une comparaison revient à étudier le signe d'une différence.

15 Les bornes comptent

Énoncé

a) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Le coefficient de x^2 est positif, donc le trinôme est négatif entre les racines. Comme on accepte aussi zéro :

$$S = [2; 3].$$

b) $-x^2 + x + 6 = -(x - 3)(x + 2)$. Ses racines sont -2 et 3 ; le coefficient dominant est négatif, donc il est positif entre elles. L'inégalité est stricte :

$$S =] - 2; 3[.$$

c) Tout carré est positif ou nul, y compris en $x = 3$ où il vaut zéro. Donc $S = \mathbb{R}$.

d) $2x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x : il ne peut pas être strictement négatif. Donc $S = \emptyset$. Dans ces deux derniers cas, le signe d'un carré suffit.

16 Deux courbes à comparer

Énoncé

1. Les intersections vérifient $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= 2x - 4 \iff x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\iff (x - 1)(x - 5) = 0. \end{aligned}$$

Les abscisses sont 1 et 5. On calcule les ordonnées avec la fonction affine, plus simple : $g(1) = -2$ et $g(5) = 6$. Les points sont $(1; -2)$ et $(5; 6)$.

2. Être en dessous signifie avoir une ordonnée plus petite à la même abscisse :

$$f(x) < g(x) \iff f(x) - g(x) < 0 \iff (x - 1)(x - 5) < 0.$$

Le produit est négatif entre les deux racines : $x \in]1; 5[$. Les intersections sont exclues puisque l'inégalité est stricte.

3. $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$ et $g(3) = 6 - 4 = 2$. On vérifie bien $-2 < 2$; 3 appartient à l'intervalle trouvé.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

17 et 18 • Partir des données

Des racines appellent un produit; un sommet appelle un carré.

17 Deux racines et un point

Énoncé

1. Toutes les fonctions cherchées s'écrivent $f(x) = a(x+2)(x-3)$, avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chaque choix de a donne ces deux racines; elles ne déterminent donc pas une fonction unique.

2. Le point $A(1; 12)$ impose

$$a(1+2)(1-3) = 12 \iff -6a = 12 \iff a = -2.$$

Ainsi $f(x) = -2(x+2)(x-3)$.

3. En développant : $f(x) = -2(x^2 - x - 6) = -2x^2 + 2x + 12$. Le signe est négatif à l'extérieur de $[-2; 3]$, nul aux bornes et positif à l'intérieur. Pour le maximum, complétons le carré :

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] + 12 \\ &= -2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Son maximum est $25/2$, atteint pour $x = 1/2$, milieu des deux racines.

18 Le sommet comme point de départ

Énoncé

1. Le sommet impose $f(x) = a(x+1)^2 + 4$. Le point B donne

$$f(1) = -4 \iff 4a + 4 = -4 \iff a = -2.$$

Donc $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$.

2. Isolons le carré :

$$f(x) = 0 \iff (x+1)^2 = 2 \iff x = -1 - \sqrt{2} \text{ ou } x = -1 + \sqrt{2}.$$

Les racines se trouvent à la même distance $\sqrt{2}$ de l'axe $x = -1$.

3. Attention au sens de l'inégalité lors de la division par -2 :

$$\begin{aligned} -2(x+1)^2 + 4 &\geq 2 \iff -2(x+1)^2 \geq -2 \\ &\iff (x+1)^2 \leq 1 \iff -1 \leq x+1 \leq 1. \end{aligned}$$

Après soustraction de 1, on obtient $S = [-2; 0]$.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

19 et 20 • Identifier et discuter

Les données exactes fixent les coefficients; un carré clarifie les cas.

19 Trois points

Énoncé

1. Les coordonnées donnent successivement

$$c = 2, \quad a + b + c = 0, \quad 9a + 3b + c = 2.$$

Avec $c = 2$, on obtient $a + b = -2$ et $9a + 3b = 0$, soit $3a + b = 0$. En soustrayant $a + b = -2$ de $3a + b = 0$, on trouve $2a = 2$, donc $a = 1$ et $b = -3$. Ainsi

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

2. $f(0) = 2$, $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f(3) = 9 - 9 + 2 = 2$: les trois points conviennent.

3. La factorisation $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ donne les racines 1 et 2. Pour l'extremum :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Son minimum est $-1/4$, atteint pour $x = 3/2$.

20 Une parabole qui se déplace

Énoncé

1. L'équation $f_k(x) = 0$ équivaut à $(x - 2)^2 = -k$.

- Si $k > 0$, alors $-k < 0$: aucune racine réelle.
- Si $k = 0$, le carré doit être nul : une seule racine, 2.
- Si $k < 0$, alors $-k > 0$: deux racines $2 - \sqrt{-k}$ et $2 + \sqrt{-k}$.

2. Pour $k = -9$, les racines sont $2 - 3 = -1$ et $2 + 3 = 5$. Le coefficient dominant est positif : la fonction est positive à l'extérieur, négative entre -1 et 5 , nulle en ces deux points.

3. Si $k \geq 0$, $(x - 2)^2 + k \geq 0$ pour tout x . Réciproquement, si f_k est positive ou nulle partout, elle l'est en 2, donc $f_k(2) = k \geq 0$. La condition est donc exactement $\boxed{k \geq 0}$.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

21 et 22 • Préserver les conditions

Une solution exclue par le domaine ne peut jamais être réintroduite.

21 Comprendre les erreurs

Énoncé

1. Les deux réels $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ ont pour carré 5. La bonne réponse est $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.
2. La division par x suppose $x \neq 0$. Il faut factoriser : $x(x - 4) = 0$, donc $S = \{0; 4\}$.
3. Le coefficient dominant est -2 . L'expression est négative sur $] -\infty; 1[\cup]3; +\infty[$, positive sur $]1; 3[$, nulle en 1 et 3.
4. Si $\Delta < 0$, le signe est celui de a , pas celui de Δ . Contre-exemple : $x^2 + 1$ a un discriminant égal à -4 , mais reste strictement positif.

22 Un quotient et une valeur interdite

Énoncé

1. Le dénominateur impose $x \neq 1$. Le domaine est donc $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.
2. Le numérateur est positif à l'extérieur de $[-2; 2]$ et négatif à l'intérieur. Le dénominateur est négatif avant 1 et positif après. On combine les signes :

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	−	−	−	0	+
$x - 1$	−	−	−	0	+	+	+
Quotient	−	0	+		−	0	+

3. On veut un quotient positif ou nul, d'où

$$S = [-2; 1[\cup [2; +\infty[.$$

Les valeurs -2 et 2 annulent le numérateur sans annuler le dénominateur : elles sont incluses. La valeur 1 rend le quotient indéfini : la double barre la signale, et elle reste exclue, même pour une inégalité large.



Vérifier. Pour $x = 0$, le quotient vaut $4 > 0$; pour $x = 3/2$, le numérateur est négatif et le dénominateur positif.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

23 et 24 • Équations et niveaux

Une transformation réversible conserve les solutions dans le domaine.

23 Équation avec un dénominateur

Énoncé

1. On doit avoir $x \neq 1$. Sur ce domaine, $x - 1$ est non nul : multiplier les deux membres par ce nombre est réversible, même si son signe est inconnu.

2. On obtient

$$\frac{3}{x-1} = x+1 \iff 3 = (x-1)(x+1) \iff 3 = x^2 - 1 \iff x^2 = 4.$$

Les solutions candidates sont -2 et 2 , toutes deux dans le domaine. Vérifions :

$$x = -2 : \frac{3}{-3} = -1 = -2 + 1; \quad x = 2 : \frac{3}{1} = 3 = 2 + 1.$$

Donc $S = \{-2; 2\}$.

3. Une égalité reste une égalité quand on multiplie ses deux membres par un même nombre. Pour préserver l'équivalence, ce nombre doit être non nul. Dans une inéquation, multiplier par un nombre négatif renverse en plus le sens ; si son signe dépend de x , il faut distinguer les cas ou faire un tableau de signes.

24 Une droite horizontale

Énoncé

La forme canonique est la plus adaptée pour comparer la hauteur k à celle du sommet :

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3.$$

Les intersections avec $y = k$ vérifient

$$(x-2)^2 - 3 = k \iff (x-2)^2 = k+3.$$

- Si $k < -3$, le membre droit est négatif : aucun point commun.
- Si $k = -3$, il est nul : un seul point $(2; -3)$.
- Si $k > -3$, il est positif : deux points d'abscisses $2 - \sqrt{k+3}$ et $2 + \sqrt{k+3}$, tous deux d'ordonnée k .

Pour $k = 1$, $(x-2)^2 = 4$, donc $x = 0$ ou $x = 4$. Les points communs sont $(0; 1)$ et $(4; 1)$.



Vérifier. Le minimum de la parabole est -3 : une droite horizontale placée en dessous ne peut pas la rencontrer.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

25 • Le cadre rectangulaire

La contrainte géométrique fixe d'abord l'intervalle utile.

25 Un rectangle à construire

Énoncé

1. Dimensions et domaine. Notons L la mesure de la longueur en mètres. Le périmètre de 28 m donne $2x + 2L = 28$, d'où $L = 14 - x$. La largeur est au moins 3 m : $x \geq 3$. Elle ne dépasse pas la longueur :

$$x \leq 14 - x \iff 2x \leq 14 \iff x \leq 7.$$

Ainsi $x \in [3; 7]$. Sur cet intervalle, les deux dimensions sont positives.

2. Aire. Le produit des mesures des côtés en mètres donne l'aire en mètres carrés :

$$A(x) = x(14 - x) = -x^2 + 14x.$$

Pour chercher le maximum, on fait apparaître un carré :

$$\begin{aligned} A(x) &= -(x^2 - 14x) = -[(x - 7)^2 - 49] \\ &= 49 - (x - 7)^2. \end{aligned}$$

3. Maximum. Puisque $(x - 7)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 49$. L'égalité est atteinte pour $x = 7$, qui est autorisé. Alors $L = 14 - 7 = 7$.

Le cadre d'aire maximale est un carré de côté 7 m , d'aire 49 m^2 .

4. Atteindre au moins 45 m^2 . Dans les unités précédentes :

$$\begin{aligned} A(x) \geq 45 &\iff 49 - (x - 7)^2 \geq 45 \\ &\iff (x - 7)^2 \leq 4 \iff -2 \leq x - 7 \leq 2 \\ &\iff 5 \leq x \leq 9. \end{aligned}$$

Mais le domaine est $[3; 7]$. On prend l'intersection :

$$x \in [5; 7].$$

Les largeurs possibles vont donc de 5 m à 7 m, avec la longueur correspondante $L = 14 - x$, comprise entre 7 m et 9 m. Les deux dimensions restent liées : on ne les choisit pas indépendamment.



Vérifier. Pour $x = 5$, la longueur est 9 et l'aire vaut 45. Pour $x = 7$, l'aire vaut 49. Dans les deux cas, le périmètre est bien 28 m.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

26 • Trois côtés à clôturer

Le côté contre le mur modifie la relation de périmètre.

26 Contre un mur

Énoncé

1. Relation et domaine. Le grillage couvre deux profondeurs et une longueur. Avec les mesures en mètres : $2x + L = 24$, donc $L = 24 - 2x$. Les deux dimensions sont strictement positives : $x > 0$ et $24 - 2x > 0$, soit $0 < x < 12$.

2. Aire maximale. L'aire $A(x)$, en mètres carrés, vaut

$$\begin{aligned} A(x) &= x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x \\ &= -2[(x - 6)^2 - 36] = 72 - 2(x - 6)^2. \end{aligned}$$

Donc $A(x) \leq 72$, avec égalité en $x = 6$. Cette valeur appartient au domaine. La longueur est alors $L = 24 - 12 = 12$.

Le maximum est 72 m^2 , obtenu avec 6 m de profondeur et 12 m de longueur. Le rectangle optimal n'est pas un carré, car seuls trois côtés utilisent la ressource disponible.

3. Aire égale à 64 m^2 . On résout

$$\begin{aligned} 72 - 2(x - 6)^2 &= 64 \iff -2(x - 6)^2 = -8 \\ &\iff (x - 6)^2 = 4 \iff x = 4 \text{ ou } x = 8. \end{aligned}$$

Les deux valeurs sont admissibles. Elles donnent respectivement $L = 16$ et $L = 8$. Les rectangles mesurent donc 4 m sur 16 m, ou 8 m sur 8 m.

4. Aire au moins égale à 64 m^2 . En divisant par -2 , on renverse l'inégalité :

$$\begin{aligned} 72 - 2(x - 6)^2 &\geq 64 \iff -2(x - 6)^2 \geq -8 \\ &\iff (x - 6)^2 \leq 4 \iff 4 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

L'intervalle est inclus dans $]0; 12[$. Les profondeurs cherchées sont donc toutes celles de $[4; 8] \text{ m}$, où cette notation désigne des mesures en mètres.

 **Véifier.** Pour le maximum, le grillage utilisé vaut $2 \times 6 + 12 = 24 \text{ m}$. Les deux solutions de la question 3 donnent bien chacune 64 m^2 .

III • CORRECTION 27

Du prix au bénéfice

Les racines délimitent les quantités rentables; le sommet donne l'optimum.

27 Une série de porte-clés

Énoncé

1. Recette, coût et bénéfice. $C(0) = 320$ € représente les frais fixes du modèle, même si aucun objet n'est vendu. La recette est le prix unitaire multiplié par la quantité vendue : $R(q) = 12q$, en euros. On retire ensuite le coût total :

$$\begin{aligned} B(q) &= 12q - (0,05q^2 + 2q + 320) \\ &= -0,05q^2 + 10q - 320. \end{aligned}$$

q est un nombre d'objets; $R(q)$, $C(q)$ et $B(q)$ sont des montants en euros. Le calcul peut donner un bénéfice négatif : c'est une perte.

2. Seuils et quantités bénéficiaires. Développons la forme proposée :

$$-0,05(q - 40)(q - 160) = -0,05(q^2 - 200q + 6400) = -0,05q^2 + 10q - 320.$$

Les racines sont $x_1 = 40$ et $x_2 = 160$. Elles sont ici des valeurs du nombre d'objets q et correspondent à $R = C$: aucun bénéfice, aucune perte.

q	$-\infty$	40	160	$+\infty$	
$B(q)$	—	0	+	0	—

Comme $a = -0,05 < 0$, B est strictement positif entre les racines. Avec q entier dans $[0; 180]$, cela donne **de 41 à 159 objets inclus**. Aux seuils 40 et 160, le bénéfice est nul.

3. Bénéfice maximal. La forme canonique se vérifie ainsi :

$$180 - 0,05(q - 100)^2 = 180 - 0,05q^2 + 10q - 500 = -0,05q^2 + 10q - 320.$$

Puisque $(q - 100)^2 \geq 0$, on a $B(q) \leq 180$. L'égalité est atteinte pour $q = 100$, entier appartenant au domaine.

$$R(100) = 12 \times 100 = 1200 \text{ €},$$

$$C(100) = 0,05 \times 100^2 + 2 \times 100 + 320 = 1020 \text{ €}.$$

Le bénéfice maximal vaut donc **180 € pour 100 objets fabriqués et vendus**. Les 1200 € de recette ne sont pas le bénéfice.

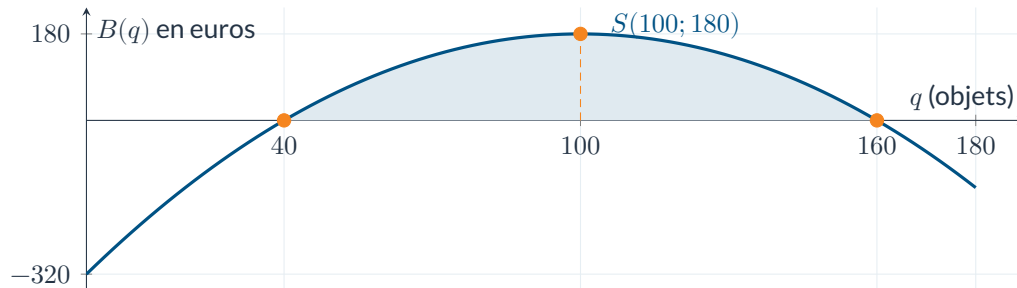
q	0	100	180
$B(q)$	-320	180	-140

III • CORRECTION 27 • SUITE

Lire la courbe et compter des objets

Une solution réelle doit devenir une quantité entière autorisée.

4. Lecture graphique. Le tracé représente le bénéfice, en plaçant les deux racines et le sommet trouvés.



La zone au-dessus de l'axe correspond au bénéfice positif. Après 100 objets, la courbe descend : le coût supplémentaire l'emporte progressivement sur la recette supplémentaire. Le modèle n'est utilisé que pour $0 \leq q \leq 180$.

5. Obtenir au moins 150 €. On choisit la forme canonique, qui isole un carré. Attention au changement de sens en divisant par $-0,05$:

$$\begin{aligned}
 B(q) \geq 150 &\Leftrightarrow 180 - 0,05(q - 100)^2 \geq 150 \\
 &\Leftrightarrow -0,05(q - 100)^2 \geq -30 \\
 &\Leftrightarrow (q - 100)^2 \leq 600 \\
 &\Leftrightarrow -10\sqrt{6} \leq q - 100 \leq 10\sqrt{6} \\
 &\Leftrightarrow 100 - 10\sqrt{6} \leq q \leq 100 + 10\sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

L'intervalle réel est environ $[75,505; 124,495]$, inclus dans le domaine. Mais on ne vend pas une fraction d'objet : le premier entier admissible est 76 et le dernier 124.

Il faut donc vendre **de 76 à 124 objets inclus**.

 **Vérifier.** $B(75) = 148,75 < 150$, mais $B(76) = 151,20 \geq 150$. Par symétrie autour de 100, $B(124) = 151,20$ et $B(125) = 148,75$. Ces quatre tests confirment les bornes entières.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

28 • Une ouverture parabolique

La largeur impose de regarder la hauteur aux bords du véhicule.

28 Vérifier un passage

Énoncé

1. Dimensions de l'ouverture. Dans le modèle, x est la mesure horizontale en mètres et $h(x) = 3 - x^2/3$ la mesure de la hauteur en mètres. Comme $x^2 \geq 0$, la hauteur maximale est 3 m, au centre $x = 0$. Au sol :

$$h(x) = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \text{ ou } x = 3.$$

L'ouverture mesure donc $3 - (-3) = \boxed{6 \text{ m}}$ de large.

2. Véhicule centré de largeur 2,4 m. Sa demi-largeur est 1,2 m. Les bords se trouvent en $x = -1,2$ et $x = 1,2$. La hauteur disponible y est

$$h(1,2) = 3 - \frac{1,44}{3} = 3 - 0,48 = 2,52.$$

Elle vaut donc 2,52 m, supérieure aux 2,4 m du véhicule. Il passe dans ce modèle sans marge, avec 0,12 m de hauteur restante aux coins.

3. Largeur maximale à hauteur 2,4 m. Notons w la demi-largeur en mètres, avec $0 \leq w \leq 3$. Pour passer, il faut

$$\begin{aligned} h(w) \geq 2,4 &\iff 3 - \frac{w^2}{3} \geq 2,4 \\ &\iff w^2 \leq 1,8 \iff 0 \leq w \leq \sqrt{1,8}. \end{aligned}$$

La largeur totale maximale est donc

$$\boxed{2\sqrt{1,8} \text{ m} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ m} \approx 2,68 \text{ m} .}$$

La valeur exacte est la limite théorique; l'approximation au centimètre ne constitue pas une marge de sécurité.

4. Pourquoi les coins suffisent. Sur $[0; 3]$, la hauteur diminue quand la distance au centre augmente. Par symétrie, sa plus petite valeur au-dessus du véhicule est donc atteinte aux deux bords. Si le toit horizontal passe aux coins, il passe aussi entre eux.

 **Vérifier.** Une vérification seulement au centre serait insuffisante : la hauteur y est maximale et ne renseigne pas directement sur les coins.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

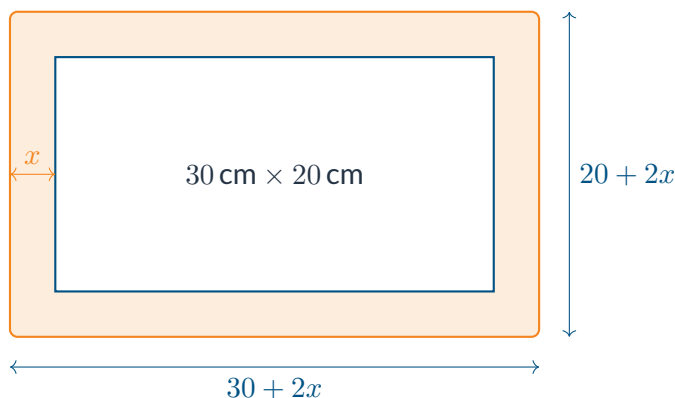
29 • La bordure de l'affiche

L'aire extérieure contient déjà l'aire intérieure.

29 Un cadre de largeur uniforme

Énoncé

1. Dimensions. La bordure ajoute x de chaque côté : la largeur extérieure est $30 + 2x$ et la hauteur extérieure $20 + 2x$, avec toutes les mesures en centimètres.



2. Aire de la bordure. L'aire intérieure est $30 \times 20 = 600 \text{ cm}^2$. L'aire extérieure, en cm^2 , vaut $(30 + 2x)(20 + 2x)$. Leur différence est

$$\begin{aligned} B(x) &= (30 + 2x)(20 + 2x) - 600 \\ &= 600 + 60x + 40x + 4x^2 - 600 = 4x^2 + 100x. \end{aligned}$$

3. Résolution. On impose $B(x) = 216$:

$$4x^2 + 100x - 216 = 0 \iff x^2 + 25x - 54 = 0.$$

Le discriminant vaut $25^2 - 4 \times 1 \times (-54) = 625 + 216 = 841 = 29^2$. Les solutions sont

$$x = \frac{-25 + 29}{2} = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-25 - 29}{2} = -27.$$

Une largeur doit être positive : seule $x = 2$ convient, soit une bordure de 2 cm.

4. Vérification. Les dimensions extérieures sont 34 cm et 24 cm. Leur aire vaut 816 cm^2 ; la bordure seule mesure bien $816 - 600 = 216 \text{ cm}^2$.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

30 • Deux carrés

Une borne n'est un maximum que si elle est atteinte.

30 Partager un ruban

Énoncé

1. Contrainte. Le premier carré utilise $4x$ cm de ruban ; il reste $40 - 4x$ centimètres. Le côté du second carré est donc $(40 - 4x)/4 = 10 - x$ centimètres. Les deux côtés doivent être positifs : $0 < x < 10$.

2. Somme des aires. Avec les côtés en centimètres, la somme en cm^2 est

$$\begin{aligned} S(x) &= x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 = 2[(x - 5)^2 - 25] + 100 \\ &= 2(x - 5)^2 + 50. \end{aligned}$$

3. Minimum. Le carré est positif ou nul, donc $S(x) \geq 50$. Cette borne est atteinte en $x = 5$, autorisé. Les deux carrés ont des côtés de 5 cm ; chaque morceau mesure 20 cm. La somme minimale est 50 cm^2 .

4. Somme de 68 cm^2 .

$$\begin{aligned} 2(x - 5)^2 + 50 &= 68 \iff (x - 5)^2 = 9 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = 8. \end{aligned}$$

Les côtés sont 2 cm et 8 cm, dans l'un ou l'autre ordre. Les morceaux mesurent 8 cm et 32 cm . Leur somme est 40 cm, et les aires totalisent $4 + 64 = 68 \text{ cm}^2$.

5. Pas de maximum sur ce domaine. On peut écrire

$$S(x) = 100 - 2x(10 - x).$$

Sur $]0; 10[$, le produit $x(10 - x)$ est strictement positif : $S(x) < 100$. En prenant un côté très petit, la somme des aires se rapproche de 100 cm^2 sans l'atteindre.

Plus précisément, S décroît jusqu'à 5, puis croît. Pour $x \leq 5$, prendre $x/2$ donne une somme plus grande ; pour $x > 5$, prendre $(x + 10)/2$ en donne aussi une plus grande. Aucun choix admissible n'est donc maximal. La valeur 100 serait atteinte seulement si l'un des carrés avait un côté nul, ce qui est interdit.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

31 • Un paramètre

Vérifier le degré avant d'utiliser le discriminant.

31 Quand le degré change

Énoncé

1. Cas particulier $m = 1$. Le coefficient de x^2 est $m - 1$. Lorsqu'il est nul, on n'a plus une équation du second degré. Pour $m = 1$, l'équation devient

$$2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

2. Cas $m \neq 1$. Les coefficients sont $a = m - 1, b = 2, c = 1$. Le discriminant vaut

$$\Delta = 2^2 - 4(m - 1) \times 1 = 4 - 4m + 4 = 4(2 - m).$$

Comme 4 est positif, le signe de Δ est celui de $2 - m$.

- Si $m < 2$ et $m \neq 1, \Delta > 0$: deux solutions réelles distinctes.
- Si $m = 2, \Delta = 0$: une racine double $-2/[2(2 - 1)] = -1$.
- Si $m > 2, \Delta < 0$: aucune solution réelle.

3. Conclusion complète.

Valeur de m	Nombre de solutions réelles distinctes
$m \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[$	Deux
$m = 1$	Une, pour une équation affine
$m = 2$	Une, racine double d'un trinôme
$m > 2$	Aucune

4. Trois vérifications. Pour $m = 0$, l'équation est $-x^2 + 2x + 1 = 0$. Elle équivaut à $(x - 1)^2 = 2$, d'où $x = 1 \pm \sqrt{2}$. En substituant $x = 1 + t$ avec $t = \pm\sqrt{2}$, on trouve $-(1 + t)^2 + 2(1 + t) + 1 = 2 - t^2 = 0$.

Pour $m = 1, x = -1/2$ donne $2(-1/2) + 1 = 0$.

Pour $m = 2$, l'équation est $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0 : x = -1$.



POINT DE VIGILANCE Le discriminant seul ne suffit pas

La valeur $m = 1$ donnerait numériquement $\Delta = 4$, mais la règle « $\Delta > 0$ donc deux racines » ne s'applique pas : son hypothèse $a \neq 0$ est fautive.

III • CORRECTIONS DÉTAILLÉES

32 • Factoriser un degré trois

Un facteur connu permet de revenir au second degré.

32 Du troisième au second degré

Énoncé

1. $P(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$: 2 est bien une racine.

2. Développons la forme proposée :

$$(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c.$$

L'identification donne $a = 1$, puis $b - 2 = -4$, donc $b = -2$; enfin $c - 2(-2) = 1$, donc $c = -3$. Le terme constant vérifie aussi $-2c = 6$. Ainsi

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3).$$

3. Dans le trinôme, les nombres de somme 2 et de produit -3 sont -1 et 3 :

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3), \quad P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

L'équation $P(x) = 0$ a donc pour solutions $\boxed{-1, 2, 3}$.

4. On range les racines, puis on combine les signes des trois facteurs :

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$x + 1$	—	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	—	—	—	0	+	+	+
$x - 3$	—	—	—	—	—	0	+
$P(x)$	—	0	+	0	—	0	+

On lit les régions négatives ou nulles :

$$\boxed{S =] - \infty; -1] \cup [2; 3]}.$$

5. La règle du trinôme venait du produit de deux facteurs affines. Ici, il y en a trois. Tout à gauche, trois facteurs négatifs donnent un produit négatif; tout à droite, trois facteurs positifs donnent un produit positif. Les deux régions extérieures n'ont donc pas le même signe.



Vérifier. En 0, $P(0) = 6 > 0$; en $5/2$, $(7/2)(1/2)(-1/2) < 0$. Ces tests sont cohérents avec le tableau.

POUR TERMINER

Ce que tu sais maintenant faire

Une compétence se reconnaît dans une décision que tu peux expliquer.

- Reconnaître un polynôme du second degré après simplification.
- Choisir entre forme développée, factorisée et canonique.
- Faire apparaître un carré dans les cas simples et l'utiliser pour une borne.
- Résoudre une équation avec une factorisation directe, la somme et le produit ou le discriminant.
- Démontrer pourquoi le discriminant conduit à zéro, une ou deux racines réelles.
- Étudier un signe, résoudre une inéquation et comparer deux courbes.
- Retrouver une fonction à partir de racines, d'un sommet ou de points.
- Modéliser une situation, respecter son domaine et conclure avec la bonne grandeur.

Ton bilan personnel

Une méthode que je peux expliquer sans regarder :

Une erreur que je sais maintenant repérer :

Un exercice à reprendre pour consolider :

Conditions d'utilisation

© 2026 Rémi Piau – Alors on science !

L'utilisation en classe, la projection, l'impression et la photocopie, intégrales ou partielles, sont autorisées pour un usage personnel ou pour les élèves directement accompagnés, sans vente des copies et en conservant le nom de l'auteur, la marque et les présentes mentions.

La diffusion numérique à des tiers, la mise en ligne, la publication de versions modifiées et l'exploitation commerciale du document ou de ses extraits nécessitent l'autorisation écrite préalable de Rémi Piau. Toute commercialisation est réservée à Alors on science !, sauf autorisation écrite.

Tous les autres droits sont réservés, sous réserve des exceptions prévues par la loi.